**78.- Hallar** $\displaystyle\sum_{j=0}^{n=1} sen\,(a+nj) = sen\,a + sen\,(a+j) + sen\,(a+2j) + \ldots + sen(a+(n-1)\,j)$ **.**

<u>Solución:</u>

Como sabemos que senp·sen q = 1/2 (cos(p-q)-cos(p+q)) entonces se tiene que:

$$\sum_{j=0}^{n-1} sen(a+uj) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{sen(a+uj)sen(u/2)}{2sen\frac{u}{2}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{2}\left[\cos\left(a+\frac{2j-1}{2}u\right)-\cos\left(a+\frac{2j+1}{2}u\right)\right]}{2sen\frac{u}{2}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\cos\left(a+\frac{2j-1}{2}u\right)-\cos\left(a+\frac{2j+1}{2}u\right)}{2sen\frac{u}{2}} = (*)$$

Si j=0 $\cos\left(a-\frac{1}{2}u\right)-\cos\left(a+\frac{1}{2}u\right)$

Si j=1 $\cos\left(a+\frac{1}{2}u\right)-\cos\left(a+\frac{3}{2}u\right)$

Si j=2 $\cos\left(a-\frac{3}{2}u\right)-\cos\left(a+\frac{5}{2}u\right)$

. . . . . .

Si j=n-2 $\cos\left(a+\frac{2n-5}{2}u\right)-\cos\left(a+\frac{2n-3}{2}u\right)$

Si j=n-1 $\cos\left(a+\frac{2n-3}{2}u\right)-\cos\left(a+\frac{2n-1}{2}u\right)$

---

$\cos\left(a-\frac{1}{2}u\right)-\cos\left(a+\frac{2n-1}{2}u\right)$

$$(*) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\left(\mathrm{a}-\frac{1}{2}u\right)-\cos\left(\mathrm{a}+\frac{2\mathrm{n}-1}{2}u\right)}{\mathrm{sen}\,\frac{\mathrm{u}}{2}} = \left\{\begin{matrix} usando\ la\ igualdad\ \cos p-\cos q = \\ = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{matrix}\right\}$$

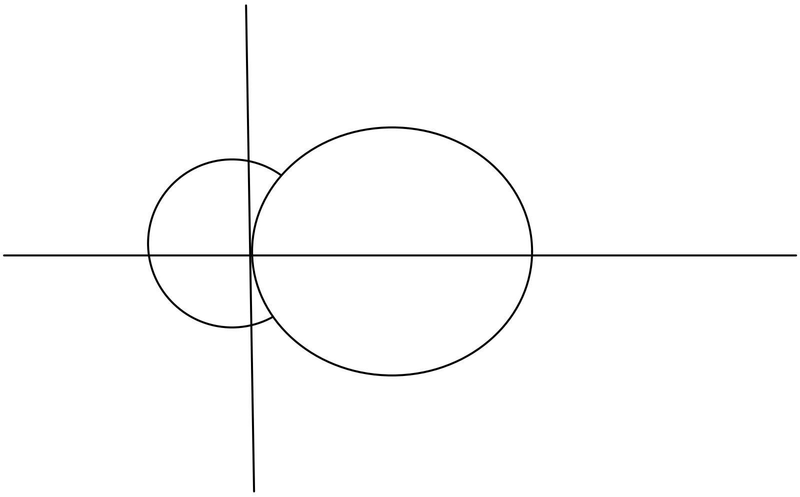
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2sen\left(\frac{2a}{2}+\frac{2n-2}{4}u\right)sen\left(\frac{2n}{4}u\right)}{sen\frac{u}{2}}=\frac{sen\left(a+\frac{n-1}{2}u\right)sen\left(\frac{n}{4}u\right)}{sen\frac{u}{2}}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\text{sen}(a+uj)=\frac{\text{sen}\left(a+\frac{n-1}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{n}{2}u\right)}{\text{sen}\left(\frac{n}{2}\right)}$$

**79.- Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje OX, la región del plano que resulta de la intersección del interior $x^2+y^2=17x$.**

<u>Resolución:</u>

Las dos circunferencias se cortan en 17=17x $\Rightarrow$x=1, y para x=1 $\Rightarrow$ $y^2=16$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ y=±4 $\Rightarrow$ $P_1(1,-4)$ y $P_2(1,4)$.



El volumen pedido es la mitad del volumen de la esfera de radiio $\sqrt{17}$ es decir, $V_1$=$V_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi(\sqrt{17})^3=\frac{34}{3}\pi\sqrt{17}$ , más del volumen resultante de girar entorno al eje ox $\gamma$, menos el de $\gamma_2$.

$$V_2=\int_0^1\pi\left[\left(\sqrt{17-x^2}\right)^2-\left(\sqrt{17x-x^2}\right)^2\right]dx=\int_0^1\pi(17-x^2-17x+x^2)dx=$$

$$=\int_0^1\pi(17-17x)dx=17\pi\int_0^1(1-x)dx=17\pi\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{17}{2}\pi$$

$$\boxed{V_T = p\left(\frac{68\sqrt{17}+51}{6}\right)u^3}$$

**80.- Sea la función y=f(x) , definida en todo R, de modo que los incrementos correspondientes de x e y son proporcionales de razón a en cualquier punto. Se supone que además $y_0=f(x_0)$ es conociedo. Calcular la expresión general de y=f(x).**

<u>Solución:</u>

Tengamos en cuenta que $\Delta f(x) = f(x+\Delta h)-f(x)$ siendo $\Delta x$ el incremento de la variable x.

Por lo tanto:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a \ \ para\ todo\ x.$$

De aquí se deduce que esta función es derivable en cualquier punto ya que su derivada en x será:

$$f´(x)= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a$$

Además si f´(x)=a para todo x, la función es de la forma

f(x)= ax+m

falta, finalmente, calcular m. Para ello, obligamos a que $y_0=f(x_0)$:

$y_0=f(x_0)=ax_0+m$

es decir, $m=y_0-ax_0=f(x_0)-ax_0$. Por lo tanto la función es:

$f(x) =ax+f(x_0)-ax_0$, o bien

$f(x)-f(x_0) = a(x-x_0)$.

**81.- Separar las raíces de la ecuación siguiente:**

**$2x^3+3x^2-72x+12=0$.**

<u>Solución:</u>

Sea $f(x) = 2x^3+3x^2-72x+12$.

$f´(x)= 6x^2+6x-72 = 6(x^2+x-12)$.

La ecuación f´(x)=0 tiene raíces $x_1=-4$, $x_2=3$. Puesto que f(-4) = 220 >0 y f(3) =-123 <0, resulta que f(x) = 0 tiene una única raíz en el intervalo (-4,3). Además f(0)=12>0, así que dicha raíz está en el intervalo (0,3). Por otra parte, f(6)>0 y f(3)<0, lo que nos permite asegurar que existe una única raíz en el intervalo (3,6). Finalmente, f(-4)>0 y f(-7)<0 así que la raíz se encuentra en el intervalo (-7,-4).

**82.- Aplicar el teorema de los incrementos finitos a la función $f(x)=(x^2+9)^{1/2}$ en el intervalo [0,4]. Aplicar la fórmula de Cauchy a las funciones f(x)=senx, g(x)=cosx, en el intervalo $[\pi/4,3\pi/4]$. En ambos casos se pide hallar el valor o valores del "punto intermedio".**

<u>Solución:</u>

1) La fórmula de los incrementos finitos se escribe en esete caso: f(4)-f(0)=f´(c)(4-0). Es decir: $(16+9)^{1/2}-9^{1/2}$ = f´(c)·4. De donde resulta f´(c)=1/2. Busquemos el punto $c\in(0,4)$.

$$f´(x) = \frac{1}{2}(x^2+9)^{1/2}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}.$$

Resolviendo la ecuación $\frac{1}{2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ obtenemos $c=\sqrt{3}$.

2) La fórmula de Cacuhy es:

$$\frac{f\left(\frac{3\pi}{4}\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{g\left(\frac{3\pi}{4}\right)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{f´(c)}{g´(c)} \quad \text{o bien} \quad \frac{sen\frac{3\pi}{4}-sen\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\cos c}{-senc}=-\cot gc$$

de donde cotg c = 0 y $c=\pi/2$.

**83.- Un depósito está inicialmente lleno con 1000 litros de agua salada cuya concentración o salinidad es de dos gramos de sal por litro. Para reducir la salinidad se hace entrar agua pura en el depósito a razón de 5 litros por minuto, al tiempo que por un orificio el depósito evacua el mismo caudal. Determinar la cantidad de sal contenida en el depósito en función del tiempo y calcular el tiempo que debe transcurrir para que queden sólo 200 gramos de sal.**

Denotemos por S(t) a la función pedida, es decir, la cantidad de sal (en gramos) que contiene el depósito en función del tiempo t(en minutos). La concentración de sal en el instante t vale $S(t)/1000=10^{-3}S(t)$ gr/litro. En el instante $t+\Delta t$ la cantidad de sal será $S(t+\Delta t)$ y por consiguiente los gramos de sal que han salido del depósito en el intervalo de tiempo $[t,t+\Delta t]$ son $S(t)-S(t+\Delta t)$. Pero por otra parte sabemos que durante ese intervalo de tiempo el depósito ha evacuado $5\Delta t$ litros de agua salada. Si el incremento $\Delta t$ es muy pequeño, la concentración del agua del depósito puede considerarse constante en el transcurso del intervalo de tiempo meniconado. El producto del agua que ha salido $5\Delta t$ por dicha concentración $10^{-3}S(t)$ nos dará también la cantida de sal desaparecida en dicho intervalo de tiempo. Planteamos así la ecuación:

$$S(t)-S(t+\Delta t)= 5\cdot 10^{-3}S(t)\Delta t$$

esto es

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=\frac{-1}{200}S(t)$$

Tomando límites cuando $\Delta t\to 0$ obtendremos (supuesta derivable la función S)

$$S'(t) = -S(t)/200$$

es decir

$$\frac{S'(t)}{S(t)}=\frac{-1}{200}$$

de modo que

$$\frac{d}{dt}\log S(t)=\frac{-1}{200}$$

luego

$$S(t)=e^{-1/200\, t +k}$$

donde k es una constante a determinar. Para t=0 sabemos que $S(0) = 2000$ luego $e^k=2000$ y la función buscada es, por fin:

$$S(t)= 2000e^{-t/200}.$$

Llamemos T al instante en el cual la sal que queda en el depósito son 200 gramos. Sustituyendo en la igualdad anterior, será:

$$200=2000e^{-T/200}$$

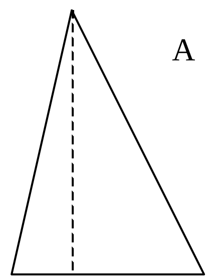
de donde se obtiene $T=200\log 10$ y como $\log 10 = 2{,}30$ resulta aproximadamente $T=460^m = 7^h40^m$.

**84.- Demostrar que todos los triángulos con la misma base y el mismo ángulo opuesto, el isósceles tiene área máxima.**

**Probar que entre todos los triángulos inscritos en una circunferencia dada, el equilátero tiene área máxima.**

<u>Solución:</u>

Sean a y A fijos. El área del triángulo es:




S=ah/2.

Ahora bien:

h=bsen$\hat{C}$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$$

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

sistema de ecuaciones que nos permite deducir que $h=\dfrac{a}{sen\hat{A}}sen\hat{B}\cdot sen\hat{C}=\dfrac{a}{sen\hat{A}}sen\hat{C}\cdot sen(\pi-\hat{A}-\hat{C})$.

Sustituyendo en la expresión del área resulta

$$S=\frac{1}{2}\frac{a^2}{senA}senCsen(\pi-A-C)$$

y buscamos el máximo de S en función de $\hat{C}$:

$$S=\frac{1}{2}\frac{a^2}{senA}\left[\cos Csen(\pi-A-C)-senC\cos(\pi-A-C)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{a^2}{senA}sen(\pi-A-2C)$$

La ecuación S´=0 es sen(π-A-2C)=0, es decir, π-A-2C=0 de donde C=$\dfrac{\pi-A}{2}$.

Puesto que $S' = -\frac{a^2}{senA}\cos(\pi - A - 2C)$, es sencillo comprobar que este valor de C corresponde a un máximo de S. Pero entonces, B=π-A-C= $\frac{\pi - A}{2}$, es decir, B=C así que, efectivamente, el triángulo que buscábamos es un triángulo isósceles.

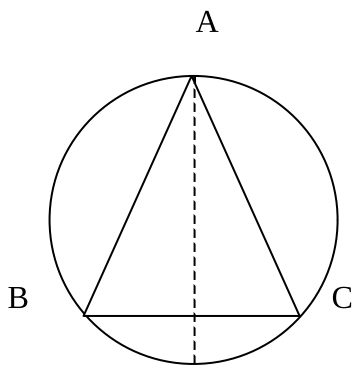
*Segunda parte:*

En el primer lugar, hemos de hacer notar que si consideramos los triángulos inscritos en una circunferencia con un lado fijo, se verifica que el ángulo opuesto a dicho lado tendrá el mismo valor para todos ellos, ya que será un ángulo inscrito a una circunferencia abarcando un arco fijo.

Deducimos entonces de la primera parte que de todos los triángulos inscritos en una misma circunferencia que tengan un lado fijo, el de mayor área es el isósceles . Entonces, resulta evidente que:

Dado un triángulo cualquiera inscrito en una circunferencia fija o bien este triángulo es isósceles o bien puedo encontrar un isósceles también inscrito en dicha circunferencia, que tenga área mayor que el triángulo inicial. (Basta para ello con tomar como fijo uno de los lados del primer triángulo y aplicar el párrafo anterior). Nuestro problema se reduce pues a demostrar que entre todos los triángulos isósceles en una circunferencia fija, el de área máxima es el equilátero.

Calculemos el área de este triángulo isósceles en función de x.




S=bh/2.

h=r+x.

Para calcular b/2, tendremos en cuenta que el triángulo ABP es rectángulo en B, así que b/2 es la altura relativa a la hipotenusa en dicho triángulo, cumpliéndose que:

$$\frac{r+x}{b/2}=\frac{b/2}{r-x}\frac{b^2}{4}=(r+x)(r-x)=r^2-x^2$$

es decir

$$\text{b/2}=\sqrt{r^2-x^2}\ .$$

Se obtiene finalmente:

$$\text{S}=\frac{b}{2}h=(r+x)\sqrt{r^2-x^2}$$

Calculemos el valor de x que hace máxima esta expresión:

$$\text{S´}=\sqrt{r^2-x^2}+(r+x)\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{-2x^2-rx+r^2}{\sqrt{r^2-x^2}}=(r-2x)\sqrt{\frac{r+x}{r-x}}$$

El valor x=r/2 anula S´ y además hace negativa S´´, así que corresponde a un máximo.

Pero si x=r/2, se obtiene que b=2$\sqrt{r^2-x^2}$ =r$\sqrt{3}$, es decir, el triángulo ABC es equilátero.

En efecto:

$$\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{(r+x)^2+(b/2)^2}=\sqrt{(3r/2)^2+(r\sqrt{3}/2)^2}=\sqrt{\frac{9r^2+3r^2}{4}}=r\sqrt{3}.$$