85.- Sea $B_j(t)$ la función polinómica:

$$\mathbf{B_j(t)}=\binom{n}{j}t^j(1-t)^{n-j},\ t\in R,\ j\leq n,\ jn\in N$$

Demostrar que:

i) $\sum_{j=1}^{n} B_j(t)=1$

ii) $\sum_{j=1}^{n} jB_j(t)=nt$

iii) $\sum_{j=2}^{n} j(j-1)B_j(t)=n(n-1)t^2$

iv) $\sum_{j=2}^{n} (j-nt)^2 B_j(t)=nt(1-t)$

<u>Solución:</u>

Consideremos la identidad: $(t+x)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}t^j x^{n-j},\ n\in N, t, x\in R$.

Derivando en ambos miembros respecto de t y multiplicando después por t se obtiene:

$$n(t+x)^{n-1}t=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}jt^j x^{n-j}$$

Derivando nuevamente y multiplicando por t^2 resulta:

$$n(n-1)(t+x)^{n-2}t^2=\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}j(j-1)t^j x^{n-j}$$

Las igualdades i), ii) y iii) se obtienen inmediatamente sustituyendo x por 1-t en las tres identidades anteriores.

Operando en las igualdades ii) y iii) resulta:

$$\sum_{j=2}^{n} j(j-1)B_j(t)=\sum_{j=2}^{n} j^2B_j(t)-\sum_{j=2}^{n} jB_j(t)=n(n-1)t^2$$

de donde:

$$\sum_{j=2}^{n} j^2B_j(t)=n(n-1)t^2+\sum_{j=2}^{n} jB_j(t)=n(n-1)t^2+nt-B_1(t)$$

Entonces:

$$\sum_{j=0}^{n}(j-nt)^2 B_j(t)=\sum_{j=0}^{n} j^2 B_j(t)+n^2t^2\sum_{j=0}^{n} B_j(t)-2nt\sum_{j=0}^{n} jB_j(t)=$$

$= n(n-1)t^2+nt+n^2t^2-2n^2t^2 = nt-nt^2 = nt(1-t)$, que es la igualdad iv).

86.- Probar que la función $f(x) = x/(1+x^2)$ definida en toda la recta real, es uniformemente contínua.

<u>Solución:</u>

Calculemos en primer lugar $|f(x_1)-f(x_2)|$, siendo x_1,x_2 dos números reales arbitrarios:

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}\right| = |x_1 - x_1| \frac{|1-x_1x_2|}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

Comprobemos que $\dfrac{|1-x_1x_2|}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\le 1$ para todo par $x_1,x_2\in R$.

Llevaremos a cabo dicha comprobación teniendo en cuenta los posibles valores de $|1-x_1x_2|$.

a) $|1-x_1x_2| = 1-x_1x_2$.

Entonces $\dfrac{|1-x_1x_2|}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\dfrac{1-x_1x_2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\le 1$ es una desigualdad equivalente a $1-x_1x_2\le$ $\le(1+x_1^2)(1+x_2^2)$, o bien $x_1^2+x_2^2+x_1^2\,x_2^2+x_1x_2\ge 0$. Ahora bien, el primer miembro de esta desigualdad se puede escribir en la forma $\left(\dfrac{x_1}{2}+x_2\right)+\dfrac{3x_1}{4}+x_1x_2$, que evidentemente, es una expresión positiva o nula.

b) $|1-x_1x_2| = 0$. Es un caso de comprobación trivial.

c) $|1-x_1x_2| = x_1x_2-1$.

Razonando igual que en a), se llega a una expresión de la forma $x_1^2+x_2^2+x_1^2\,x_2^2+2-x_1x_2 =$ $\left(\dfrac{x_1}{2}+x_2\right)^2+\dfrac{3x_1}{4}+x_1^2x_2^2+2$, que también es positiva o nula.

Volviendo de nuevo a nuestro problema, hemos obtenido que, para todo $x_1,x_2\in R$ es:

$|f(x_1)-f(x_2)|\le |x_1-x_2|$.

Entonces, fijado cualquier número real $E>0$, si tomamos $\eta=E$, resulta que si $|x_1-x_2|\le\eta$, será $|f(x_1)-f(x_2)|\le E$, lo que demuestra la continuidad uniforme de la función f.

87.- Establecer la igualdad siguiente:

$$2\cdot arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}+arcsen(2x-1)=\pi/2$$

Solución:

Si utilizamos la notación:

$$\alpha=arctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\ \ (o\ bien, tg\,\alpha=\sqrt{\frac{1-x}{x}})$$

$$\beta=arcsen(2x-1)\ \ (o\ bien,\ 2x-1=sen\beta)$$

se tratará de probar que $2\alpha+\beta=\pi/2$. Pero obsérvese que esto equivale a:

$$\text{sen } \beta = sen\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

y esta igualdad es cierta, según se compruba inmediatamente sustituyendo las expresiones de tg α y sen β en función de x.

88.- Sea p(x) una función polinómica de grado n con coeficientes reales tal que la ecuación p(x)=0 admite n raíces distintas $x_1,\ldots,x_n$ ninguna de las cuales es nula.

i) Expresar en función de estas raíces:

$$\mathbf{f(x)} = \frac{p'(x)}{p(x)}\ \ \mathbf{y\ g(x)}=\frac{p''(x)}{p(x)}-\left|\frac{p'(x)}{p(x)}\right|^2$$

ii) Calcular las sumas:

$$S_{-1}=\sum_{j=1}^{n}x_j^{-1},\ S_{-2}=\sum_{j=1}^{n}x_j^{-2},\ S=\sum_{i<j}x_ix_j$$

Solución:

1º.- Si a_n es el coeficiente de x^n en p(x), podemos escribir:

$p(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$

Derivando:

$p'(x) = a_n[(x-x_2)\ldots(x-x_n)+(x-x_1)\ldots(x-x_n)+\ldots+(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})]$ y dividiendo aquí por p(x) (puesto que $a_n\neq 0$), se obtiene:

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\ldots+\frac{1}{x-x_n}$$ para $x\neq x_j$, j=1,2,...,n. Luego f(x) = $=\sum_{j=1}^{n}(x-x_j)^{-2}$

2º.- Las sumas S_{-1} y S_{-2} son respectivamente los valores de las funciones f y -g para x=0. Así pues:

$$S_{-1}=\frac{p'(0)}{p(0)} \text{ y } S_{-2}=\left[\frac{p'(0)}{p(0)}\right]^2-\frac{p''(0)}{p(0)}.$$

Para hallar la suma S observaremos que:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^{-1}\right)^2=\sum_{j=1}^{n}xj^{-2}+s\sum_{i<j}^{n}x_i^{-1}x_j^{-1}$$

es decir, $S_{-1}^2 = S_{-2}+2S$, de donde:

$$S=\frac{1}{2}(S_{-1}^2-S_{-2})=\frac{1}{2}\frac{p''(0)}{p(0)}.$$

89.- Se considera el determinante de orden n:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+x & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1+x \end{vmatrix}$$

Establecer la fórmula:

$$F'_n(x)=nF_{n-1}(x)$$

y deducir que

$$F_n(x)=x^n+nx^{n-1}.$$

<u>Solución:</u>

Emplearemos la regla obtenida en el problema anterior para calcular la derivada de un determinante. Observemos, además, que, al derivar la fila o la columna i-ésima se obtiene una fila o una columna que tiene todos sus elementos nulos salvo el a_{ij} que es igual a 1. Es decir:

$$F'_n(x)=\begin{vmatrix} 1, & 0, & ..., & 0 \\ 1, & 1+x & ..., & 1 \\ ... & ... & ..., & ... \\ 1, & 1, & ..., & 1+x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1+x & 1 & ..., & 1 \\ 0 & 1 & ..., & 0 \\ ... & ... & ..., & ... \\ 1, & 1, & ..., & 1+x \end{vmatrix}+...+\begin{vmatrix} 1+x & 1, & ..., & 1 \\ 1, & 1+x & ..., & 1 \\ ... & ... & ..., & ... \\ 0, & 0, & ..., & 1 \end{vmatrix}$$

Cada uno de los determinantes qe aparecen en esta suma se desarrolla por la fila que tiene todos los elementos nulos menos uno, y como este elementos se sencuentra situado siempre en la diagonal principal, su adjunto llevará signo positivo. Este adjunto es, evidnentemente el determinante $F_{n-1}(x)$, y entonces:

$$F'_n(x)=\begin{vmatrix} 1+x, & 1, & ..., & 1 \\ 1, & 1+x & ..., & 1 \\ ... & ... & ..., & ... \\ 1, & 1, & ..., & 1+x \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 1+x & 1 & ..., & 1 \\ 1 & 1+x & ..., & 1 \\ ... & ... & ..., & ... \\ 1, & 1, & ..., & 1+x \end{vmatrix}+...+1\cdot\begin{vmatrix} 1+x & 1, & ..., & 1 \\ 1, & 1+x & ..., & 1 \\ ... & ... & ..., & ... \\ 1, & 1, & ..., & 1+x \end{vmatrix}=$$

$= nF_{n-1}(x)$.

Estableceremos la fórmula $F_n(x) = x^n+nx^{n-1}$ por inducción. Desde luego, esta fórmula es cierta para n=2: $F_2(x)=x^2+2x$.

En efecto:

$$F_2(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^2-1=x^2+2x+1-1=x^2+2x$$

Supongamos que es cierta para n: $F_n(x) = x^n+nx^{n-1}$ y comprobemos que también es cierta para n+1.

Según la fórmula establecida en la primera parte:

$F'_{n+1}(x)= (n+1)F_n(x) = (n+1)(x^n+nx^{n-1}) = (n+1)x^n+(n+1)nx^{n-1}$, es decir, $F_{n+1}(x)$ es una función cuya derivada es la expresión anterior. Según la regla del cálculo de derivadas, resulta inmediato que:

$F_{n+1}(x)= x^{n+1}+(n+1)x^n$

así que la fórmula también es cierta para n+1, c.q.d.

90.- Se considera la función real f definida por

$$f(x)=x\cdot sen\frac{1}{x}\,sen\frac{1}{sen\frac{1}{x}}$$

para x¹ 0 y x ¹ 1/kp , con k=±1, ±2,... completándose su definición en toda la recta del siguiente modo:

f(0)=0 y f(1/kp)=0 para k=±1,±2,...

Probar que esta función es continua en todo punto x Î R pero carece de derivada en los puntos del conjunto M={0,1/p ,-1/p ,1/2p ,-1/2p ,...}.

<u>Solución:</u>

En un punto cualquiera $x\in R\text{-}M$ la función f es continua en virtud del teorema de la continuidad de las funciones compuestas. La continuidad en el punto x=0 resulta de la mayoración evidente $|f(x)|\le|x|$, que no sdice que si $x\to 0$ también $f(x)\to 0 = f(0)$. La continuidad en un punto de la forma $x=1/k\pi$ con $k\in Z\text{-}\{0\}$ resulta de la mayoración $|f(x)|\le|x|\cdot|\text{sen } 1/x|$ ya que $\lim_{x\to 1/k\pi} |\text{sen } 1/x| = 0$.

Así pues, la función f es contínua en toda la recta real. Su derivabilidad es cualquier punto $x\in R\text{-}M$ se obtiene como consecuencia del teorema de derivabilidad de las funciones compuestas. Estudiemos la derivabilidad en el punto x=0. Para ello, formaremos el siguiente cociente incremental

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)}{h}=sen\frac{1}{h}\,sen\frac{1}{sen\frac{1}{h}}$$

donde se observa que si $h=1/k\pi$ y hacemos $k\to\infty$, el límite que se obtiene es 0, porque la función f se anula en estos puntos, mientras que si tomamos $h=2/(4k+1)\pi$ y hacemos $k\to\infty$, el límite que resulta es sen 1. Al no coincidir estos límites, se ve que no existe el $\lim_{h\to 0}f(h)/h$, por lo cual la función f no es derivable en el punto x=0. Estudiemos por último la derivabilidad en un punto de la forma $x=1/k\pi$. Para ello formaremos el cociente incremental

$$\frac{f\left(\frac{1}{kp}+h\right)-f\left(\frac{1}{kp}\right)}{h}=\frac{f\left(\frac{1}{kp}+h\right)}{h}=\frac{1+hkp}{hkp}\,sen\frac{kp}{1+hkp}\,sen\frac{1}{sen\frac{kp}{1+hkp}}$$

para estudiar su límite cuando $h\to 0$. Es inmediato que $\lim_{h\to 0}(1+hk\pi)/k\pi = 1/k\pi$. Por otro lado,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,sen\frac{k\mathbf{p}}{1+hk\mathbf{p}}=(-1)^{k+1}k^2\mathbf{p}^2$$

como se deduce de la relación

$$\text{sen }\frac{k\mathbf{p}}{1+hk\mathbf{p}}=sen\frac{k\mathbf{p}}{1+hk\mathbf{p}}-senk\mathbf{p}=2\cos\frac{(2+hk\mathbf{p})k\mathbf{p}}{2+2hk\mathbf{p}}\,sen\frac{-hk^2\mathbf{p}^2}{2+2hk\mathbf{p}}\;.$$

Ahora bien, no es difícil comprobar que el límite de

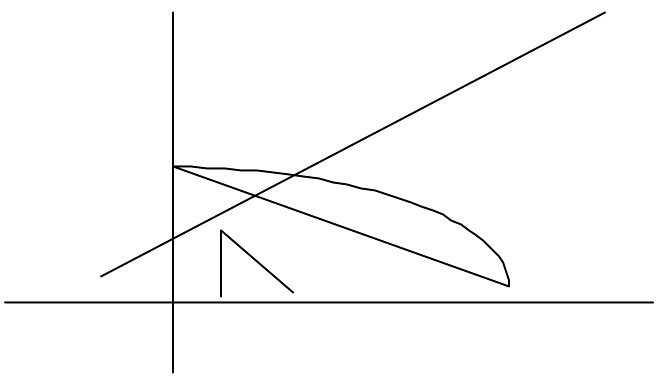
$$sen\frac{1}{sen\dfrac{k\mathbf{p}}{1+hk\mathbf{p}}}$$

cuando h→0 no existe. Luego no puede existir el límite del cociente incremental que venimos estudiando, es decir, la función f no es derivable en ningún otro punto de la forma x01/kπ, con k∈Z-{0}. Así pues, la función dada f es continua en R y derivable en todo punto de R-M, careciendo de derivada en los puntos del conjunto M.

91.- Dada la parábola de ecuación y=$\sqrt{2px}$, respecto de un sistema cartesiano rectangular XOY de ejes coordenados, hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal en un punto cualquiera P=(x_0,y_0) así como las longitudes de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la subnormal.

Solución:

La derivada de y= $\sqrt{2px}$ vale y´=$\dfrac{2p}{2\sqrt{2px}}=\dfrac{p}{y}$



La ecuación de la tangente en P es $y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0)$, o sea:

$$px-y_0y-px_0+y_0^2=0.$$

La normal es la perpendicular a la tangente en el punto P. Su ecuación será:

$$y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-x_0)$$

es decir,

$$y_0x+py-y_0x_0-py_0 = 0.$$

El punto T de intersección de la tangente con el eje OX se obtiene haciendo y=0 en la ecuación de la tangente y despejando x; resulta:

$$x_T=\frac{px_0-y_0^2}{p}=x_0-\frac{y_0^2}{p}$$

El punto N de intersección de la normal con el eje OX se obtiene haciendo y=0 en la ecuación de la normal y despejando x; resulta:

$$x_N=\frac{y_0x_0+py_0}{y_0}=x_0+p$$

La subtangente es, por definición, la longitudf del segmento HT (donde $H=(x_0,0)$ es la proyección ortogonal de P sobre el eje OX). Valdrá pues, $S_t=HT=x_T-x_0=-y_0^2/p =-2x_0$. La subnormal es, por definición, la longitud del segmento HN. Valdrá, pues, $S_n= HN = x_N-x_0=p$. Observamos entonces que en una parábola la subnormal es constante (independiente del punto P desde el cual se considera); puede demostrarse con facilidad que esta propiedad caracteriza a las parábolas. La longitud de la tangente es, por definición, la del segmento PT. Se calcula por el teorema de Pitágoras PT = $=\sqrt{y_0^2+S_t^2}=\sqrt{y_0^2+4x_0^2}$. Análogamente, la longitud de la normal es PN = $=\sqrt{y_0^2+S_N^2}=\sqrt{y_0^2+p^2}$.

92.- Supongamos que g es una función derivable en R con derivada acotada: $|g'(x)|\leq M$. Fijado E>0, consideremos la función f(x)=x+Eg(x). Demostrar que f es inyectiva si E es suficientemente pequeño. Determinar un conjunto de valores admisibles de E dependiente sólo de M.

Solución:

La función f es derivable y por lo tanto continua. Así que, para ser inyectiva debe ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente en R, es decir, debe ser $f'(x)>0$ o bien $f'(x)<0$ para todo $x\in R$.

$$f'(x) = 1+Eg'(x)$$

La condición $f'(x)<0$ es incompatible con la condición $|g'(x)| \leq M$. (haga el lector los cálculos). Así pues, exijamos que $f'(x)>0$ para todo x:

$$f'(x) = 1+Eg'(x)>0$$

equivale a:

$$g'(x)>-1/E \text{ para todo } x$$

Por otra parte, $|g'(x)|\leq M$ equivale a

$$-M\leq g'(x)\leq M$$

así que basta con fijar E de forma que $-M>-1/E$, o bien $M<1/E$, que proporciona para E el conjunto de valores: $E<1/M$.