103. $\int \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^4 + x^2 + 1} dx$

<u>Sol.</u>

Las raíces de la ecuación $x^4 + x^2 + 1$ son $x_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, así que el polinomio $x^4 + x^2 + 1$ se descompone de la forma:

$$x^4 + x^2 + 1 = \left[x - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[x - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{Ax + B}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{Cx + D}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

identificando coeficientes, se obtienen los valores:

A = 0, B = ½, C = 1, D = -½,

Por lo que:

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^4 + x^2 + 1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \int \frac{x - 1/2}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \qquad (1)$$

Calculemos por separado estas integrales:

a) Hacemos el cambio de variable $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u$ de donde, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}du$:

$$\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{1}{\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}} \frac{\sqrt{3}}{2} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan t + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$$

b) Hacemos el cambio de variable $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u$ de donde, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}du$:

$$\int \frac{x-1/2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}u-1}{\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}du=\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}u-1}{u^2+1}du=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\int \frac{u}{u^2+1}du-\int \frac{1}{u^2+1}du\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\log(u^2+1)-\arctan u\right]+C=\frac{1}{2}\log\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$

Sustituyendo ambos resultados en (1):

$$\int \frac{x^3-x^2+2x}{x^4+x^2+1}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\log\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$

104. $\displaystyle\int \frac{2x^2-x-2}{(x-3)(x^2+x+1)}dx$

Sol.

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x^2-x-2}{(x-3)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

identificando coeficientes, resulta A = 1, B = 1, C = 1

(1)

$$\int \frac{2x^2-x-2}{(x-3)(x^2+x+1)}dx=\int \frac{1}{x-3}dx+\int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\log(x-3)+\int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \text{ en}$$

la última integral hacemos el cambio de variable $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t, dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$:

$$\int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}\int \frac{t}{t^2+1}dt+\int \frac{1}{t^2+1}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\log(t^2+1)+\arctan t\right]+C=\frac{1}{2}\log\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$

Sustituyendo en (1):

$$\int \frac{2x^2 - x - 2}{(x-3)(x^2+x+1)}dx = \log(x-3) + \frac{1}{2}\log\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + C$$

105. $\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$

<u>Sol.</u>

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\right] + \frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1}$$

operando resulta:

A = -1/3, B = 0, C = 0, D = -1/9, E = 1/9, F = -1/9

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = \frac{-\frac{1}{3}x^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} - \frac{1}{9}\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{9}x - \frac{1}{9}}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}x^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} - \frac{1}{9}\log(x-1) + \frac{1}{9}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$

(1)

resolvamos esta última integral: la ecuación $x^2+x+1=0$ tiene las raíces

$$x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

así que el polinomio $x^2+x+1$ se descompone de la forma:

$$x^2+x+1 = \left[x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

de donde:

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dx$$

Hacemos el cambio de variable $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$:

$$\int \frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}-1}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{3}{2}}{t+1}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\log(t^2+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{3}{2}\arctan t+C=$$

$$=\frac{1}{2}\log\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]-\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$

Sustituyendo en (1):

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx=\frac{-\frac{1}{3}x^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}-\frac{1}{9}\log(x-1)+$$

$$+\frac{1}{18}\log\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]-\frac{\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$

106. $\int \frac{x^{3/2}(1-x)^{-3/2}}{x+x^{1/2}(1-x)^{-1/2}}dx$

Sol.

$$\int \frac{x^{3/2}(1-x)^{-3/2}}{x+x^{1/2}(1-x)^{-1/2}}dx=\int \frac{\left(\frac{x}{1-x}\right)^{3/2}}{x+\left(\frac{x}{1-x}\right)}dx$$. Hacemos el cambio $\frac{x}{1-x}=t^2$,

del cual se obtiene $x=\frac{t^2}{1+t^2}$ y $dx=\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$. Por lo tanto:

$$\int \frac{x^{3/2}(1-x)^{-3/2}}{x+x^{1/2}(1-x)^{-1/2}}dx=\int \frac{t^3}{\frac{t^2}{1+t^2}+t}\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt=\int \frac{2t^4}{(1+t^2)(t^2+t^3+t)}dt=$$

$$=2\int \frac{t^3}{(t^2+t+1)(1+t^2)}dt$$

esta última integral se resuelve descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{t^3}{(t^2+t+1)(1+t^2)}=\frac{At+B}{t^2+t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$$

Operando se obtienen los valores:

$$A = 1,\ B = 1,\ C = 0,\ D = -1$$

Así pues,

$$\int \frac{t^3}{(t^2+t+1)(1+t^2)}dt = \int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt - \int \frac{1}{t^2+1}dt = \int \frac{t+1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt - \arctan t$$

La integral $\int \frac{t+1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt$ se resuelve con ayuda del cambio de variable

$$t+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}s:$$

$$\int \frac{t+1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}s+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}s^2+\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}ds = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}s+1}{s^2+1}ds = = \frac{1}{2}\log(s^2+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan s + C =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[\frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)+C$$

Finalmente, resulta:

$$\int \frac{x^{3/2}(1-x)^{-3/2}}{x+x^{1/2}(1-x)^{-1/2}}dx = \log\left[\frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\frac{1}{2}\right)-2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$$

107. Sea $f:[0,\pi/2]\to\mathbb{R}$ una función reglada y $\lambda = \lim_{x\to\pi/2,\, x<\pi/2} f(x)$. Demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} n\cos x \sin^n x f(x)dx = \lambda$$

<u>Sol.</u>

Mediante un sencillo cálculo directo observamos que

$$\lambda\int_0^{\pi/2} n\cos x\sin^n x dx = \frac{n}{n+1}\lambda\ .$$

Ahora estudiaremos la diferencia $I = \int_0^{\pi/2} n\cos x \sin^n x f(x)dx - (n/n+1)\lambda$ . Por definición del número $\lambda$ , sabemos que fijado arbitrariamente un número $\varepsilon > 0$, existe otro número $\eta$ con $0 < \eta < \pi/2$ tal que $\left| f(x) - \lambda \right| \le \varepsilon$ siempre que sea $\pi/2 - \eta \le x \le \pi/2$ . Entonces descomponemos $I$ en la forma $I_1 + I_2$ donde

$$I_1 = \int_0^{\pi/2-\eta} n\cos x \sin^n x\left[f(x) - \lambda\right]dx$$
$$I_2 = \int_{\pi/2-\eta}^{\pi/2} n\cos x \sin^n x\left[f(x) - \lambda\right]dx$$

Como la función $f(x) - \lambda$ está acotada en $[0, \pi/2]$ por ser reglada, podremos escribir

$$|I_1| \le M\int_0^{\pi/2-\eta} n\cos x \sin^n x dx = M\,\frac{n}{n+1}\sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)$$

donde M es una constante, y de aquí se deduce que $\lim_{n\to+\infty} I_1 = 0$ . Así que existe un número natural $\nu$ tal que $|I_1| \le \varepsilon$ siempre que sea $n \ge \nu$ . Igualmente se prueba sin dificultad que

$$|I_2| \le \varepsilon\int_{\pi/2-\eta}^{\pi/2} n\cos x \sin^n x dx \le \varepsilon$$

para todo $n$. Entonces $\lim_{n\to+\infty} I_2 = 0$ , de donde se deduce lo que queríamos demostrar.

108. Sea $I$ un intervalo compacto de la recta real. A cada intervalo abierto o cerrado $(a, b) \subset I$ y a cada función reglada $f$ definida en él asociémosles un número $I(a, b; f)$ de modo que se verifiquen las cinco condiciones siguientes:

1) $I(a,b; f+g) = I(a,b; f) + I(a,b; g)$ cualesquiera que sean las funciones $f$ y $g$.
2) $I(a,b; kf) = kI(a,b; f)$ cualesquiera que sean el número $k$ y la función $f$.
3) $I(a,b;1) = b - a$ , donde 1 denota la función constante igual a 1 en $(a, b)$.
4) $I(a,b; f) = I(a,c; f) + I(c,b; f)$ , cualquiera que sea el punto $c \in (a,b)$ .
5) $|I(a,b; f| \le k \sup_{a\le x\le b} |f(x)|$ donde $k$ es una constante que depende del intervalo $(a, b)$ y de la función $f$.

Demostrar que $I(a,b; f) = \int_a^b f$

Sol.

Supongamos primero que $f$ es la función característica de un cierto intervalo $(a,b) \subset I$, esto es, $f(x)=1$ para $x \in (a,b)$ y $f(x)=0$ para $x \in I-(a,b)$. Según la propiedad 3) es claro que $I(a,b;f)=b-a=\int_b^a f$. En particular, si $a=b$, se obtiene $I(a,a;f)=0$. Como $[a,b]=\{a\}\cup]a,b[\cup\{b\}$, aplicando la propiedad 4) se ve el intervalo $(a, b)$ abierto o cerrado. Supongamos ahora que $f$ es una función escalonada en $[a, b]$. Entonces $f$ es, evidentemente, una combinación lineal de funciones características de subintervalos abiertos (salvo un número finito de puntos).

Aplicando las propiedades 1) y 2) se obtiene inmediatamente que $I(a,b;f)=\int_a^b f$.

Supongamos por último que la función $f$ es en general reglada. Existe entonces una sucesión $(f_n)$ de funciones escalonadas en $[a, b]$ que converge uniformemente hacia $f$. De las propiedades 1), 2) y 5) deducimos que

$$\left|I(a,b;f)-I(a,b;f_n)\right|=\left|I(a,b;f-f_n\right|\leq k\sup_{a\leq x\leq b}\left|f(x)-f_n(x)\right|$$

Cuando $n\to+\infty$, el último término tiende hacia 0 por la convergencia uniforme. Luego

$$\lim_{n\to+\infty} I(a,b;f_n)=I(a,b;f)$$

Ahora bien, según hemos visto más arriba, $I(a,b;f_n)=\int_a^b f_n$ ya que las $f_n$ son escalonadas. Resulta entonces que $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n=I(a,b;f)$. Pero por definición, el primer miembro es la integral de la función reglada $f$ en el intervalo $[a, b]$. Luego $\int_a^b f_n=I(a,b;f)$ c. q. d.

109. Demostrar que $\lim_{n\to+\infty} J_n=0$ siendo

$$J_n=\int_0^p f_n(x)\sin x dx \text{ y } f_n(x)=\frac{x^n(bx-a)^n}{n!}$$

donde $a$, $b$, $n$ son números naturales y $p\leq a/b$

<u>Sol.</u>

Es inmediato ver que la función polinómica $p(x)=x(bx-a)$ tiene un mínimo relativo en el punto $x=\frac{a}{2b}$ y su valor en este mínimo es $\frac{-a^2}{2b}$, que es también el mínimo absoluto de dicha función en el intervalo [0,a/b]. Luego $\left|f_n(x)\right| \le \dfrac{a^{2n}}{2^n b^n n!}$ para todo [0,a/b]. Tendremos, puesto que [0,π]⊂[0,a/b]:

$$\left|J_n\right| = \int_0^{p} \left| f_n(x) \sin x \right| dx \le \int_0^{p} \left| f_n(x) \right| dx \le p \frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{2b}\right)^n$$

de donde se deduce que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|J_n\right| = 0$ y por tanto $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ .

110. Determinar la función derivable $f$ definida en [0, 2] que verifique la ecuación $3\int_0^x f(t)dt = \left[f(x) + 2f(0)\right]x$ y es tal que $f(1) = 1$, $f(2) = 7$.

Sol.

Si $f$ es derivable en [0, 2], será continua, así que, derivando en la igualdad del enunciado resultará:

$$3f(x) = f(x) + 2f(0) + f'(x)x$$

es decir:

$$xf'(x) - 2f(x) + 2f(0) = 0$$

Vamos a llamar $g(x) = f(x) - f(0)$, por lo que $g'(x) = f'(x)$, y la igualdad anterior puede escribirse de la forma:

$$xg'(x) - 2g(x) = 0$$

o bien;

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2}{x}$$

Pero se sabe que $\left[\log\left|g(x)\right|\right]' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ y también $\left[\log x^2\right]' \dfrac{2}{x'}$, lo que nos permite escribir:

$$\log\left|g(x)\right| = \log x^2 + c = \log x^2 + \log k = \log kx^2$$

en donde hemos tenido en cuenta que $c$ es una constante arbitraria, que por lo tanto puede escribirse en la forma $c = \log k$.

Resulta finalmente:

$$\left|g(x)\right| = kx^2$$

o bien

$$\left|f(x) - f(0)\right| = kx^2$$

Puesto que sabemos que $f(1) = 1$ y $f(2) = 7$, obtenemos:

$$|1 - f(0)| = k$$
$$|7 - f(0)| = 4k$$

de donde:

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

111. Sea $f$ una función real con derivada continua en el intervalo $I = [a, b]$. Supongamos que $f(a) = 0$ y que $0 \le f'(x) \le 1$, para todo $x \in I$. Establecer las siguientes desigualdades:

1) $[f(x)]^2 \le 2\int_a^b f(t)dt$ para todo $x \in I$

2) $\int_b^a [f(x)]^3 dx \le \left[\int_b^a f(t)dt\right]^2$

Sol.

1) Se tiene $\int_a^x f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}[f(x)]^2$ de donde:

$$[f(x)]^2 = 2\int_a^x f(t)f'(t)dt$$

para todo $x \in I$. Como $f'(t) \le 1$, será $f(t)f'(t) \le f(t)$ para todo $t \in I$. Luego $[f(x)]^2 \le 2\int_a^x f(t)dt$.

Por otra parte, al ser $f'(x) \ge 0$ en $I$ y $f(a) = 0$, la función $f$ es monótona creciente en $I$ y entonces:

$$\int_a^x f(t)dt \le \int_a^b f(t)dt$$

resultando

$$[f(x)]^2 \le 2\int_a^b f(t)dt \text{ c. q. d.}$$

2) Llamando $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, tenemos según una desigualdad obtenida en el apartado 1) que $[f(x)]^2 \le 2F(x)$ para todo $x \in I$. Entonces

$$\int_b^a [f(x)]^3 dx = \int_b^a [f(x)]^2 f(x)dx \le \int_b^a 2F(x)F'(x)dx =$$

$$= [F(b)]^2 - [F(a)]^2 = \left[\int_b^a f(t)dt\right]^2 \; c.q.d$$

112. Sea $f$ una función real continua en toda recta real, y sea $F$ la función:

$$F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt \text{ si } x \neq 0, F(0) = f(0)$$

Demostrar que $F$ es continua en IR y derivable en IR – {0}. Aplicación al caso $f(t) = t\sin(1/t)$ si $t \neq 0$, $f(0) = 0$.

Sol.

Si $x \neq 0$, $F$ es el producto de las funciones $f_1(x) = \frac{1}{2x}$ y $f_2(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt$, ambas continuas en IR – {0}, así que podemos asegurar la continuidad de $F$ en IR – {0}.

Examinaremos ahora el caso $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt = \lim_{x\to 0} 1\frac{1}{2x} 2xf(c_x) = \lim_{x\to 0} f(c_x)$$

en donde $c_x \in [x,-x]$. Pero $f$ es una función continua, y cuando $x \to 0$, también $c_x \to 0$ así que $\lim_{x\to 0} f(c_x) = f(0)$. Resulta finalmente que $\lim_{x\to 0} F(x) = f(0) = F(0)$, por lo que concluimos que $F$ es continua también en el punto $x = 0$.

Por otra parte, las funciones $f_1$ y $f_2$ son derivables en todo punto $x \neq 0$, así que su producto, que es la función $F$, también lo será. Estudiemos el comportamiento de $F$ en $x = 0$.

$$F'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(t)dt - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2h}2hf(c_h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c_h) - f(0)}{h} \Leftrightarrow c_h \in [-h,h]$$

En principio, no puede asegurarse la existencia del límite anterior, que es indeterminado, así que tampoco puede asegurarse la existencia de $F'(0)$.

Aplicación a la función $f(t) = t \sin \frac{1}{t}$ f si $t \neq 0$, $f(0) = 0$. La función $f$ es continua en todo IR, ya que $\lim_{t \to 0} t \sin \frac{1}{t} = 0 = f(0)$. Podemos asegurar entonces que $F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} t \sin \frac{1}{t} dt$ es una función continua en IR, y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En $x = 0$ resulta: $F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c_h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c_h \sin \frac{1}{c_h}}{h}$ que es una indeterminación.