9. Hallar un número de cuatro cifras que sea igual al cubo de la suma de las cifras.

Solución:

Sea $x_1x_2x_3x_4$ el número buscado con $x_1 \neq 0$ ya que si no, no seria de cuatro cifras.

Tenemos que $x_1x_2x_3x_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3$ y como

$1000 \leq x_1x_2x_3x_4 < 10000 \Rightarrow 1000 \leq (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 < 10000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 \leq (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \leq 21$

Como todo número se puede escribir de la forma 3n – 1, 3n o 3n + 1, entonces el cubo de dicho número, es decir, $x_1x_2x_3x_4$ se puede escribir de la forma 9K – 1, 9K, 9K + 1, y aplicando el criterio de divisibilidad del 9, se tiene que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ es de la forma 9K – 1, 9K o 9K + 1, es decir, que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ tiene que ser el 10, el 17, el 18 o el 19. Entonces:

$10^3 = 1000 \neq 1^3 \rightarrow$ Este número no es solución.

$17^3 = 4913 = (4 + 9 + 1 + 3)^3 = 17^3 \Rightarrow$ Es solución del problema.

$18^3 = 5832 = (5 + 8 + 3 + 2)^3 = 18^3 \Rightarrow$ Es solución del problema.

$19^3 = 6859 \neq (6 + 8 + 5 + 9)^3 = 28^3 \Rightarrow$ Este número no es solución.

La solución del problema es:

$n_1 = 4913$ $n_2 = 5832$

10. Hallar en el sistema de base 9 un número formado por tres cifras significativas, tal que transportado al sistema de base 13 se escriba con las tres mismas cifras.

Solución:

Sea N el número buscado, como tiene las tres mismas cifras significativas en base 9 y en base 13 se tiene que $13^2 \leq N < 9^3 \Rightarrow 169 \leq N \leq 728$, o lo que es lo mismo $100_{13)} \leq N \leq 440_{13)}$.

Supongamos que $N = x_1x_2x_{3\,13)}$ entonces por lo dicho anteriormente se tiene que $1 \leq x_1 \leq 4$, $0 \leq x_2 \leq 8$ y $0 \leq x_3 \leq 8$.

Entonces:

a) Si $N = x_1x_2x_{3\,9)} \Rightarrow 169x_1 + 13x_2 + x_3 = 81x_1 + 9x_2 + x_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 88x_1 + 4x_2 = 0$ que no tiene solución.

b) Si $N = x_1 x_3 x_2\,_{9)} \Rightarrow 169x_1 + 13x_2 + x_3 = 81x_1 + 9x_3 + x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 88x_1 + 12x_2 = 8x_3$ pero $8x_3 \leq 64 < 88x_1 + 12x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ No tiene solución.

c) $160x_1 = 68x_2 \Rightarrow 40x_1 = 17x_2$ pero $40x_1$ con $1 \leq x_1 \leq 4$ no es múltiplo de 17 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ No tiene solución.

d) Si $N = x_2 x_3 x_1\,_{9)} \Rightarrow 169x_1 + 13x_2 + x_3 = 81x_2 + 9x_3 + x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 42x_1 = 17x_2 + 2x_3$ donde x_2 ha de ser par:

- para $x_1 = 1 \Rightarrow 42 = 17x_2 + 2x_3$ con $x_2 = 2$ y $x_3 = 4$
- para $x_1 = 2 \Rightarrow 84 = 17x_2 + 2x_3 \Rightarrow x_2 = 4$ y $x_3 = 8$
- para $x_1 = 3 \Rightarrow 126 = 17x_2 + 2x_3$ que no tiene solución
- para $x_1 = 4 \Rightarrow 168 = 17x_2 + 2x_3$ que no tiene solución.

e) Si $N = x_3 x_1 x_2\,_{9)} \Rightarrow 169x_1 + 13x_2 + x_3 = 81x_3 + 9x_1 + x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 160x_1 + 12x_2 = 80x_3 \Rightarrow 40x_1 + 3x_2 = 20x_3 \Rightarrow 3x_2 = 20(x_3 - 2x_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_3 - 2x_1$ tiene que ser múltiplo de 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ tenemos:

- $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$
- $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4$
- $x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6$
- $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 8$

porque si $x_3 - 2x_1 \geq 3 \Rightarrow x_2 > 8$

f) Si $N = x_3 x_2 x_1\,_{9)} \Rightarrow 169x_1 + 13x_2 + x_3 = 81x_3 + 9x_2 + x_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 168x_1 + 4x_2 = 80x_3 \Rightarrow 42x_1 + x_2 = 20x_3 \Rightarrow x_2$ tiene que ser par, es decir,

$x_2 = 2(10x_3 - 21x_1)$, pero como $1 \leq x_1 \leq 4 \Rightarrow 10x_3 - 21x_1$ es mayor que 6 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ No hay solución.

Las soluciones son:

Base 9	214	482	210	420	630	840
Base 13	124	248	102	204	306	408

11. Probar que $11^n - 4^n$ es múltiplo de 7.

Solución:

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} / 11^n - 4^n = 7k\}$

ι) ¿$1 \in A$?

$11 - 4 = 7 \Rightarrow 1 \in A$

ιι) Supongamos cierto que $n \in A$, es decir: $11^n - 4^n = 7k$

Veamos si $n + 1 \in A$, ¿$11^{n+1} - 4^{n+1} = 7k^1$?

$11^{n+1} - 4^{n+1} = 11 \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n = (7 + 4) \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n =$

$= 7 \cdot 11^n + 4 \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n = 7 \cdot 11^n + 4(11^n - 4^n) =$

$= 7 \cdot 11^n + 4 \cdot 7k = 7(11^n + 4k) = 7k \Rightarrow n + 1 + 1 \in A$

$\Rightarrow A = \mathbb{N}$

12. Los coeficientes de los términos t_n, t_{n+1}, t_{n+2} que ocupan los lugares n, n+1, n+2 en el desarrollo de $(a + b)^{14}$ están en progresión aritmética. Calcular n sabiendo que es menor que 7.

Solución:

El desarrollo del binomio de Newton para $(a + b)^{14}$ es $(a + b)^{14} = \sum_{j=0}^{14} \binom{14}{j} a^j b^{14-j}$

Entonces las posiciones n, n + 1 y n + 2 las ocupan los términos:

$$t_n = \binom{14}{n-1} a^{n-1} b^{15-n} \quad ; \quad t_{n+1} = \binom{14}{n} a^n b^{14-n} \quad ; \quad t_{n+2} = \binom{14}{n+1} a^{n+1} b^{13-n}$$

y como los coeficientes están en progresión aritmética, se tiene que:

$$\binom{14}{n} - \binom{14}{n-1} = \binom{14}{n+1} - \binom{14}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{14!}{n!(14-n)!} - \frac{14!}{(n-1)(15-n)!} = \frac{14!}{(n+1)!(13-n)!} - \frac{14!}{n!(14-n)!}$$

pero multiplicando por $\dfrac{(n-1)!(13-n)!}{14!}$ nos queda:

$$\frac{1}{n(14-n)} - \frac{1}{(14-n)(15-n)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(14-n)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (n + 1)(15-n) – n(n + 1) = (14 – n)(15 – n) – (n + 1)(15 – n) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow n^2 - 14n + 45 = 0 \Rightarrow n = \frac{14 \pm \sqrt{196-180}}{2} = \frac{14 \pm 4}{2} = \begin{cases} 9 \\ 5 \end{cases}$$

pero como n < 7 $\Rightarrow$ n = 5

13. Se colocan al azar n bolas en n urnas. Calcular las probabilidades siguientes:
a) de que las n urnas queden ocupadas
b) de que quede una sola urna vacía

Solución:

a) El número de cosas favorables es n! que son las n formas diferentes de colocar n bolas en n urnas (permutaciones sin repetición de n elementos).

Entonces:

$$P = \frac{n!}{n^n}$$

b) El número de cosas posibles es n^n que es el número de variaciones con repetición de n elementos tomados de n en n.

El número de cosas favorables viene dado por:

- Primero elegimos que urnas vamos a dejar vacía entre las n que hay y esto es $\binom{n}{1} = n$.

- Segundo elegimos que urna va a tener dos bolas, porque las demás van a tener una, y esto es $\binom{n-1}{n} = n-1$.

- Tercero elegimos que dos bolas de las n que hay vamos a situar en la urna que tendrá dos bolas, esto es, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

- Y por último situemos las (n – 2) bolas restantes en las (n – 2) urnas restantes $\Rightarrow$ (n – 2)!

Entonces las cosas favorables son: $n(n-1)\frac{n(n-1)}{2}(n-2)!$

Entonces la probabilidad es:

$$P = \frac{n(n-1)\dfrac{n(n-1)}{2}(n-2)!}{n^n} = \frac{(n-1)^2(n-2)!}{2\cdot n^{n-2}}$$

Soluciones:

$$\text{a) } P = \frac{n!}{n^n}$$

$$\text{b) } P = \frac{(n-1)^2(n-2)!}{2n^{n-2}}$$

14. En un armario hay n pares de zapatos distintos, es decir, cada par es diferente de los restantes pares. Se toman r zapatos al azar. Se pide la probabilidad de que entre los zapatos elegidos aparezcan exactamente h pares.

Solución:

El número de casos posibles es $\binom{2n}{r}$ que son el número de combinaciones de 2n elementos tomados de r en r.

El número de casos favorables viene dado por:

- Primero elegimos h pares entre los n que hay, esto es: $\binom{n}{h}$
- En segundo lugar debemos elegir entre los (n – h) pares que quedan los r – 2h de los cuales vamos a sacar un zapato de cada uno, esto es: $\binom{n-h}{r-2h}$
- Y por último, hay $\binom{2}{1}$ formas de elegir un zapato de las dos que hay en cada par, de manera que nunca elijamos un par completo.

Entonces hay n = $\binom{n}{n}\binom{n-h}{r-2h}2$ casos favorables.

Entonces la probabilidad viene dada por:

$$P = \frac{\binom{n}{n}\binom{n-h}{r-2h}2}{\binom{2n}{r}}$$

15. **Resolver en $\mathbb{Z}_7$ el sistema:**

$$\begin{cases} x-2y+5z=2 \\ 3x+y-2z=1 \\ 5x+4y+z=5 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x-2y+5z=2 \\ 3x+y-2z=1 \\ 5x+4y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2'=F_2-3F_1 \\ F_3'=F_3-5F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & -17 & -5 \\ 0 & 14 & -24 & -5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F'_3=F_3-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} x-2y+5z=2 \\ 4z=2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ z = 4 $\Rightarrow$ x – 2y + 20=2 $\rightarrow$ x = 2y – 18 $\Rightarrow$ x = 2y + 3

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2y+3 \\ z=4 \end{cases} \quad \text{con } y\in \mathbb{Z}_7$$

16. Demostrar que siendo n un número entero, la expresión

$$\frac{n^5-5n^3+4n}{n+2}$$

siempre es divisible por 24.

Solución:

Sea $\quad x_n = \dfrac{n^5-5n^3+4n}{n+2}$

Vamos a intentar factorizar el numerador ya que, si uno de los factores fuese el propio (n + 2) podríamos simplificar la expresión.

$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) = n(n - 2)(n + 2)(n - 1)(n + 1)$

entonces $\quad x_n = (n - 2)(n - 1)\, n(n + 1)$.

Como queremos demostrar que x_n es divisible por $24 = 8 \cdot 3$, es suficiente que demostremos que x_n es divisible por 8 y por 3.

- x_n será divisible por ocho, porque como tenemos que x_n es un producto de 4 número consecutivos, entonces como mínimo dos de ellos son pares, y como cada cuatro números hay uno que es divisible por 4 entonces uno de ellos será divisible por 4 y el otro al ser par por 2, entonces x_n es divisible por 8.

- x_n es divisible por 3 porque cada tres números consecutivos hay uno que es divisible por 3 $\Rightarrow$ x_n es divisible por 3.

$\Rightarrow$ x_n es divisible por 24.

17. a) Sea x un número racional, ¿qué condición debe cumplir para que existan y sean distintos $x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}$?.

b) Sean x e y dos números racionales que cumplen la condición del apartado a), y además las siguientes: $x < y$, $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$. **Indicar que números son positivos del conjunto.**

$$H = \left\{ x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, y, -y, \frac{1}{y}, -\frac{1}{y} \right\}$$

c) Si además se cumple y = MaxH, $\frac{1}{x} <$ **x, ordenar de menor a mayor los números del conjunto HU{0, -1,1}.**

Solución:

a) Para que x y –x sean distintos, como $x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ debe ocurrir que $x \notin \{0\}$. Pero por otro lado se tiene que si $x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x \notin \{-1,0,1\}$ y como $x \neq -\frac{1}{x}$ y $-x \neq \frac{1}{x} \Rightarrow$ la solución de este apartado es:

$$x \notin \{-1,0,1\}$$

b) Como $x < y$ y además $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ $\Rightarrow$ x e y tienen distinto signo, ya que si no $x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. En concreto $x < 0 < y$ $\Rightarrow$ Se tiene que los elementos positivos del conjunto H (que los denotaremos como el conjunto H^+) serán:

$$H^+ = \{-x, -\frac{1}{x}, y, \frac{1}{y}\}$$

c) Como $\frac{1}{x} < x$ con $x < 0$, se tiene que $x > -1$ y por lo tanto $\frac{1}{x} < -1$ y además $y = \text{MaxH} \Rightarrow y > 1 \Rightarrow \frac{1}{y} < 1$. Pero al ser $y = \text{MaxH} \Rightarrow y > -\frac{1}{x}$. Por lo tanto, el orden de los elementos es:

$$- y < \frac{1}{x} < -1 < x < -\frac{1}{y} < 0 < \frac{1}{y} < -x < 1 < -\frac{1}{x} < -y$$