18. a) Demostrar que si n es par, los números naturales $n^2 - 1$ y 3n + 1 son primos entre si.
b) Demostrar que si n = 30m, entonces la cantidad de números enteros positivos distintos de cero que no son mayores que m y que no se dividen por ninguno de los números 6, 10, 15 es igual a 22m.

Solución:

a) Supongamos que a es un divisor primo de $n^2 - 1$, entonces a divide a n – 1 o a n + 1. En caso de que divida a n – 1 entonces divide a 3n – 3, pero si divide a n + 1 entonces también divide a 3n + 3.

Supongamos que divide también a 3n + 1, entonces divide a (3n + 1)–(3n – 3)=4 o divide a (3n + 3) – (3n + 1) = 2, entonces a = 2.

Pero como 3n + 1 y $n^2 - 1$ son impares (por ser n par), entonces a = 2, no puede dividirlos, entonces son primos entre si.

b) Como hay 30m enteros positivos no mayores que n y se cumple que:

- hay $\frac{n}{6} = \frac{30m}{6} = 5m$ múltiplos de 6 no mayores que n
- hay $\frac{n}{10} = \frac{30m}{10} = 3m$ múltiplos de 10 no mayores que n
- hay $\frac{n}{15} = \frac{30m}{15} = 2m$ múltiplos de 15 no mayores que n

Pero como 30 es en mcd de 6 y 10, de 6 y 15 y de 10 y 15 $\Rightarrow$ hay $\frac{n}{30} = m$ múltiplos de 30 no mayores de n que los hemos contado como múltiplos de 6, 10 y 15.

El número de enteros positivos buscado es:

$$30m - (5m + 3m + 2m - m - m) = 22m$$

La solución es: 22m

19. Un número tiene 24 divisores, su mitad tiene 18 divisores y su triple 28 divisores. Hallar el número.

Solución:

Supongamos que $n = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot n_3^{a_3} \cdot .... \cdot n_5^{a_5}$ es el número buscado, con 2, 3, n_3,…, n_3 primos.

Entonces se tiene que como:

$$\frac{n}{2} = 2^{a_1-1} \cdot 3^{a_2} \cdot n_3^{a_3} \cdot \ldots \cdot n_5^{a_5}$$
$$3n = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2+1} \cdot n_3^{a_3} \cdot \ldots \cdot n_5^{a_5}$$

Se verifica que:

$$\begin{cases} 24 = (a_1+1)(a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_5+1) \\ 18 = a_1(a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_5+1) \\ 28 = (a_1+1)(a_2+2) \cdot \ldots \cdot (a_5+1) \end{cases}$$

Dividiendo la 1ª ecuación por la 2ª ecuación tenemos:

$$\frac{24}{18} = \frac{a_1+1}{a_1} \Rightarrow a_1 = 3$$

Dividiendo la 3ª ecuación por la 2ª ecuación tenemos:

$$\frac{28}{18} = \frac{a_2+2}{a_2+1} \Rightarrow a_2 = 5$$

Como tenemos que 24 = (3 + 1)(5 + 19 entonces $a_3 = a_4 = \ldots = a_5 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 2^3 \cdot 3^5 = 1944 \rightarrow n = 1944$

20. ¿Cuántas cifras tiene el menor número natural que cumple que, cuando la primera cifra de la izquierda se coloca en el último lugar de al derecha, el número que resulta es una vez y media el número inicial?.

Solución:

Si llamamos m al número de cifras, n_m a la primera cifra y N al número que queda después de haber suprimido la primera cifra. Entonces.

$$10N + n_m = \frac{3}{2}\left(n_m \cdot 10^{m-1} + N\right)$$

$$\Rightarrow n_m(3 \cdot 10^{m-1} - 2) = 17N.$$

Entonces $3 \cdot 10^{m-1} - 2$ debe ser múltiplo de 17 pues el número 17 es primo $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot 10^{m-1} - 2 \equiv 0(17) \Rightarrow 3 \cdot 10^{m-1} \equiv 2(17) \Rightarrow 3 \cdot 10^m \equiv 20(17) \Rightarrow 3 \cdot 10^m \equiv 3(17) \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^m \equiv 1(17) \Rightarrow$ m 16 por el teorema de Fermat.

Como 10 y 17 son primos entre si, y el indicador de 17 es 16, el menor número que verifica la periodicidad de los restos potenciales tiene que ser un divisor de 16.

Entonces como.

$10^1 \equiv -7\ (17)$ $10^2 \equiv -2\ (17)$

$10^4 \equiv 4\ (17)$ $10^6 \equiv -1\ (17)$

$\Rightarrow$ El número buscado es el propio 16.

Entonces la cifra que buscamos tiene 16 cifras.

21. Demostrar que $3^{3n+3} - 26n - 27$ es múltiplo de 169 para todo n entero positivo.

Solución:

Sea $x_n = 3^{3n+3} - 26n - 27$.

1) Efectivamente si $n = 1$ entonces $x_1 = 3^6 - 26 - 27 = 676 = 4 \cdot 169$ entonces x_n es múltiplo de 169 para n = 1.

2) Si demostramos que $x_{n+1} \equiv x_n\ (169)$ entonces aplicando el principio de inducción tendremos que la propiedad se verifica $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Demostrar que $x_{n+1} \equiv x_n$ (169) es lo mismo que comprobar que $x_{n+1} - x_n \equiv 0(169)$.

$X_{n+1} - x_n = 3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27 - 3^{3n+3} + 26n + 27 =$

$= 3^{3n+3} \cdot 3^3 - 26n - 26n - 26 - 27 - 3^{3n+3} + 26n + 27 = (3^3 - 1)3^{3n+1} - 26 =$

$= 26(3^{3n+3} - 1) = 26((3^3)^{n+1} - 1) = 26(27^{n+1} - 1) = \{$Aplicando la fórmula del

polinomio ciclotómico$\} = 26(27 - 1)(27^n + 27^{n-1} + \ldots.. + 27 + 1) =$

$= 26^2\,(27^n + 27^{n-1} + \ldots + 27 + 1) = 676 \cdot (27^n + 27^{n-1} + \ldots. + 27 + 1) =$

$= 169 \cdot 4 \cdot (27^n + 27^{n+1} + \ldots. + 27 + 1) = 0(169) \Rightarrow x_{n+1} \equiv x_n\ (169)$

Entonces por el principio de inducción $3^{3n+3} - 26n - 27$ es múltiplo de 169 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

22. Probar que si m y n son enteros primos entre si, y a y b enteros cualesquiera, existe un entero x tal que

x º a(m) y x = b(n)

Solución:

Como m y n son enteros primos entre si, tenemos entonces, utilizando la identidad de Bezout que:

$$1 = \alpha m + \beta n$$

Pero multiplicando esta expresión por b – a se tiene que:

b – a = (b – a) αm + (b – a)βn

$\Rightarrow$ b + (a – b) βn = a + (b – a) αm

$\Rightarrow$ Definimos x como este número, es decir.

x = b + (a – b)βn que es lo mismo que

x = a + (b – a)αm porque son iguales,

y como se ve, se verifica que:

$$x \equiv a(m) \text{ y } x \equiv b(n)$$

23. Sea Q(K) = {xy^{-1} Î K; x, y Î Z(K), y ¹ 0}, a los elementos de este subconjunto se les llama racionales del cuerpo K. Demostrar que:

a) Q(K) es un subcuerpo de K.
b) Demostrar que es el menor subcuerpo de K.

Solución:

Tomaremos los elementos de Q(K) como xy^{-1} = $\frac{x}{y}$, que nos será más cómodo.

a) i) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ con b $\neq$ 0 y d $\neq$ 0 y como se cumple que ad, bc y bd $\in$ (K) $\Rightarrow$ $\frac{ad \pm bc}{bd} \in Q(k)$.

ii) $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$ con b $\neq$ 0 y d $\neq$ 0 y como ac y bd $\in$ Z(K) $\Rightarrow$ $\frac{ac}{bd} \in Q(K)$.

iii) $\left(\frac{a}{b}\right) \Big/ \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ad}{bc}$ con b $\neq$ 0, c $\neq$ 0 y d $\neq$ 0 y como ad y bc $\in$ Q(K) $\Rightarrow$ $\frac{ad}{bc} \in Q(K)$

$\Rightarrow$ Q(K) es un subcuerpo de K

b) Sea K´ un subcuerpo cualquiera de K, entonces como 1$\in$ K´ (por ser un subcuerpo de K) y si x $\in$ K´ $\Rightarrow$ x´+ 1 $\in$ K´ (por propiedad aditiva), entonces por el principio de inducción N(K) $\subset$ K´. Es evidente también que O $\in$ K´(por ser un subcuerpo de K) y si x $\in$ K´ $\Rightarrow$ (- x) $\in$ K´ entonces Z(K)$\subset$K´. Y por la propia definición de Q(K) podemos decir que Q(K)$\subset$ K´ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Q(K) es el menor subcuerpo de K.

24. Demostrar que $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ no pueden ser términos de una progresión aritmética.

Solución:

Supongamos que si son términos de una progresión aritmética de diferencia d, entonces existen términos m y n tales que m ≠ 0, n ≠ 0 con:

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=md \quad y \quad \sqrt{5}-\sqrt{3}=nd$$

Por lo tanto, podemos asegurar que:

$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{md}{nd}=\dfrac{m}{n}\in \mathbb{Q}$ y que $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{nd}{md}=\dfrac{n}{m}\in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{15}+3-\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}\in \mathbb{Q}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\sqrt{15}+\sqrt{10}-3-\sqrt{6}\in \mathbb{Q}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \left(\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}\right) y \left(\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\in \mathbb{Q}$, entonces su diferencia es un nº racional $\Rightarrow$ $2\sqrt{10}\in \mathbb{Q}$ (contradicción) $\Rightarrow$ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ no son términos de una progresión geométrica.

25. Demostrar que para todo número natural n, el número dado por $A_n = (n^5 - n)(n^4 + n^2 - 6$ es divisible por 210.

Solución:

Como tenemos que:

$A_n = (n^5 - n)(n^4 + n^2 - 6) = n(n^4 - 1)(n^4 + n^2 - 6) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)(n^4 + n^2 - 6)$

$= n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)(n^2 + 3)(n^2 - 2).$

Además tenemos que 210 = 2 · 3 · 5 · 7, bastará ver que A_n es divisible por 2, 3, 5, 7.

- Es divisible por 2 y por 3 puesto que n –1, n y n + 1 son tres números consecutivos $\Rightarrow$ uno o dos de ellos son pares y uno de ellos es múltiplo de 3, ya que cada dos números consecutivos uno es par y cada tres números consecutivos uno es múltiplo de 3.

- Es divisible por 5 puesto que:

a) Si n = 5p, ya está
b) Si $n \neq 5p$ utilizando el teorema de Fermat $\Rightarrow n^4 - 1$ es múltiplo de 5.

- Es divisible por 7 puesto que:

a) Si n = 7p, ya está
b) Si $n = 7p + 1 \Rightarrow n^2 - 1 = (7p + 1)^2 - 1 = 49p^2 + 14p + 1 - 1 =$

$= 7(7p^2 + 2p)$ que es múltiplo de 7.

c) Si $n = 7p + 2 \Rightarrow n^2 + 3 = (7p + 2)^2 + 3 = 49p^2 + 28p + 4 + 3 =$

$= 7(7p^2 + 4p + 1)$ que es múltiplo de 7.

d) Si $n = 7p + 3 \Rightarrow (n^2 - 2) = (7p + 3)^2 - 2 = 49p^2 + 42p + 9 - 2 =$

$= 7(7p^2 + 6p + 1)$ que es múltiplo de 7.

e) Si $n = 7p + 4 \Rightarrow (n^2 - 2) = (7p + 4)^2 - 2 = 49p^2 + 56p + 16 - 2 =$

$= 7(7p^2 + 8p + 2)$ que es múltiplo de 7.

f) Si $n = 7p + 5 \Rightarrow (n^2 + 3) = (7p + 5)^2 + 3 = 49p^2 + 70p + 25 + 3 =$

$= 7(7p^2 + 10p + 4)$ que es múltiplo de 7.

g) Si $n = 7p + 6 \Rightarrow (n^2 - 1) = (7p + 6)^2 - 1 = 49p^2 + 84p + 36 - 1 =$

$= 7(7p^2 + 12p + 5)$ que es múltiplo de 7.

Luego A_n es divisible por 2, 3, 5, 7 $\Rightarrow A_n$ es divisible por 210.

26. a) Demostrar que para todo número natural n y p (con p < n y n ¹ 0) el número

$A_n = (n+1)^n - \sum_{i=0}^{p-2} \binom{n}{i} n^i$ **es decir, por n^p.**

b) Demostrar que para todo número natural n y p (con p < n y n ¹ 0) el número

$B_n = p^{(p^n-1)n} - \sum_{i=0}^{p-2} \binom{n}{i} n^i$ **es divisible por $(p^n - 1)^p$.**

Solución:

a) Tenemos que demostrar que:

$(n+1)^n - \sum_{i=0}^{p-2}\binom{n}{i}n^i \equiv 0(n^p)$. Entonces:

$$(n+1)^n - \sum_{i=0}^{p-2}\binom{n}{i}n^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}n^i - \sum_{i=0}^{p-2}\binom{n}{i}n^i = \sum_{i=p-1}^{n}\binom{n}{i}n^i =$$

$$= \binom{n}{p-1}n^{p-1} + \binom{n}{p}n^p + \binom{n}{p+1}n^{p+1} + \dots\dots + \binom{n}{n}n^n =$$

$$= \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}n^{p-1} + \binom{n}{p}n^p + \binom{n}{p+1}n^{p+1} + \binom{n}{n}n^n =$$

$$= \frac{\binom{n}{p-1}}{n}n^p + \binom{n}{p}n^p + \binom{n}{p+1}n^{p+1} + \dots\dots + \binom{n}{n}n^n =$$

$$= n^p\left[\frac{\binom{n}{p-1}}{n} + \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}n + \dots\dots + \binom{n}{n}n^{n-p}\right] \Rightarrow (n+1)^n - \sum_{i=o}^{p-2}\binom{n}{i}n^i \equiv 0(n^p)$$

$\Rightarrow (n+1)^n - \sum_{i=0}^{p-2}\binom{n}{i}n^i$ es divisible por n^p.

b) Sea $a = p^n - 1 \Rightarrow a^p = (p^n - 1)^p$

$$\Rightarrow (a+1)^a = (p^n - 1 + 1)^a = p^{na} = p^{n(p^n - 1)}$$

$$\Rightarrow (a+1)^a - \sum_{i=0}^{p-2}\binom{n}{i}n^i = p^{n(p^n-1)} - \sum_{i=0}^{p-2}\binom{n}{i}n^i \Rightarrow (a+1)^a - \sum_{i=0}^{p-2}\binom{n}{i}n^i = B_n$$

Y por el apartado a) tenemos que B_n es divisible por $a^p \Rightarrow p^{(p^n-1)n} - \sum_{i=0}^{p-2}\binom{n}{i}n^i$ es divisible por $(p^n - 1)^p$.

27. a) Demostrar que existen infinitos números de la forma $A_n = 10^n + 3$ que son compuestos.
b) Hallar el menor número natural A tal que, dividido por 2 da de resto 1, dividido por 3 da de resto 2, dividido por 4 da de resto 3, dividido por 5 da de

resto 4, dividido por 6 da de resto 5, dividido por 7 da de resto 6, dividido por 8 da de resto 7 y dividido por 9 da de resto 8.

Solución:

a) Vamos a demostrar que existen infinitos A_n compuestos viendo que existen infinitos A_n que son divisibles por 7. Sea n = 6K + 4:

$$A_n = 10^n + 3(7) \Rightarrow A_n \equiv 10^{6K+4} + 3(7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_n \equiv 10^4 \cdot 10^{6K} + 3(7) \Rightarrow A_n \equiv 3^4 \cdot \left(10^6\right)^K + 3(7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_n \equiv 81 \cdot \left(10^6\right)^K + 3(7)$$ y como $10^6 \equiv 1(7)$ por el teorema de Fermat

$$\Rightarrow A_n \equiv 4 \cdot 1^K + 3(7) \Rightarrow A_n \equiv 4 + 3(7) \Rightarrow A_n \equiv 0(7) \Rightarrow$$

$\Rightarrow A_n$ es divisible por 7. Si n = 6K + 4 $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_n = 10^{6K+4} + 3 \quad \forall K \in \mathbb{N}$ es divisible por 7 y por lo tanto es compuesto de $\forall K \in \mathbb{N}$.

b)
- Como al dividir A por 2 queda resto 1 $\Rightarrow$ A + 1 es divisible por 2.
- Como al dividir A por 3 queda resto 2 $\Rightarrow$ A + 1 es divisible por 3.
- Como al dividir A por 4 queda resto 3 $\Rightarrow$ A + 1 es divisible por 4.
- Como al dividir A por 5 queda resto 4 $\Rightarrow$ A + 1 es divisible por 5.
- Como al dividir A por 6 queda resto 5 $\Rightarrow$ A + 1 es divisible por 6.
- Como al dividir A por 7 queda resto 6 $\Rightarrow$ A + 1 es divisible por 7.
- Como al dividir A por 8 queda resto 7 $\Rightarrow$ A + 1 es divisible por 8.
- Como al dividir A por 9 queda resto 8 $\Rightarrow$ A + 1 es divisible por 9.

Como buscamos el menor valor de A que verifique estas condiciones $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ A + 1 = m.c.m (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = 2520
$\Rightarrow$ A = 2519