28. Hallar un número entero A que no tenga mas factores primos que 2, 5 y 7, sabiendo además que 5ª tiene divisores más que A y que 8ª tiene 18 divisores mas que A. Calcular también la suma de todos los divisores de A.

Solución:

a) Como no tiene mas factores primos que 2, 5 y 7 $\Rightarrow$ $A = 2^a \cdot 5^b \cdot 7^c$ entonces
$5A = 2^a \cdot 5^{b+1} \cdot 7^c$ y $8A = 2^{a+3} \cdot 5^b \cdot 7^c$

Utilizando la fórmula que nos proporciona el número de divisores se tiene que:

$$\begin{cases} (a+1)(b+2)(c+1) = (a+1)(b+1)(c+1) + 8 \\ (a+4)(b+1)(c+1) = (a+1)(b+1)(c+1) + 18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+1)(b+1+1)(c+1) = (a+1)(b+1)(c+1) + 8 \\ (a+1+3)(b+1)(c+1) = (a+1)(b+1)(c+1) + 18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+1)(b+1)(c+1) + (a+1)(c+1) = (a+1)(b+1)(c+1) + 8 \\ (a+1)(b+1)(c+1) + 3(b+1)(c+1) = (a+1)(b+1)(c+1) + 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+1)(c+1) = 8 \\ 3(b+1)(c+1) = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+1)(c+1) = 18 \\ (b+1)(c+1) = 6 \end{cases} \text{(1) entonces dividiendo}$$

tenemos que: $\dfrac{a+1}{b+1} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow a = 4\boldsymbol{a} - 1 \ y \ b = 3\boldsymbol{a} - 1$

que sustituyendo en (1) nos da que $\alpha = 1 \Rightarrow a = 3, b = 2, c = 1$

$\Rightarrow A = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 1400 \Rightarrow A = 1400$

b) Utilizando la fórmula para la suma de divisores en teste problema tenemos que:

$$S = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} + \frac{5^3 - 1}{5 - 1} + \frac{7^2 - 1}{7 - 1} = 15 \cdot 31 \cdot 8 = 3720$$

S = 3720

29. Demuestra que si K es un cuerpo de característica p, siendo p primo, entonces "x, y Î K, se verifica:

$$\mathbf{(x + y)^p = x^p + y^p}$$

Solución:

Tenemos que:

$$(x+y)^p = \binom{p}{0}x^p + \binom{p}{1}x^{p-1}y + \binom{p}{2}x^{p-2}y^2 + \ldots.. + \binom{p}{p-1}xy^{p-1} + \binom{p}{p}y^p$$

Por un lado tenemos que $\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$, pero por otro lado si $1 \leq K < p$ y si e = elemento unidad, entonces como $K!\binom{p}{K} = p(p-1)(p-2)\cdot \ldots\ldots \cdot (p-K+1)$ se obtiene que:

$$(K!e)\left(\binom{p}{K}e\right) = p(p-1)(p-2)\cdot \ldots\ldots \cdot (p-K+1)e = 0$$

$\Rightarrow$ Como K!e = e(2e)(3e) ·……· (Ke) y he $\neq$ 0 si $1 \leq h < p \Rightarrow$

$\Rightarrow$ K!e = 0 $\Rightarrow \binom{p}{K}e = 0$

Por lo tanto $(x + y)^p = x^p + y^p$

30. Dado un subconjunto A de la recta real ℝ, se dice que un punto xÎℝ es un punto de condensación de A si cualquier entorno de x contiene una infinidad no numerable de puntos de A.
Se pide:
a) Demostrar que cualquier subconjunto no numerable de ℝ admite como mínimo un punto de condensación.
b) Si P simboliza el conjunto de todos los puntos de condensación de un subconjunto A de ℝ, demuestre que P es un cerrado de ℝ.

Solución:

a) Sea A un conjunto de ℝ no numerable, y supongamos un intervalo cerrado y acotado I = [-n, n] $\subset$ A.

Supongamos que A no tienen puntos de condensación $\Rightarrow \forall x \in [-n, n] \Rightarrow \exists \cup(x)$ tal que U(x)$\cap$A es como mucho numerable.

$\Rightarrow$ Como esto ocurre $\forall x \in I \Rightarrow$ existe una familia {U(x):x$\in$I} de entornos abiertos que recubres a I, y como I es compacto $\Rightarrow$ existe un subrecubrimiento finito $U(x_1)$,…….$U(x_r)$ cuya unión es I.

$\Rightarrow$ I$\cap$A = $\underset{j=1}{\overset{r}{U}}(U(x_j) \cap A)$ que es como mucho numerable, porque es la unión finita de conjunto como mucho numerable.

⇒ Como A = $\underset{n\in N}{U}\left(\left[-n,n\right]\cap A\right)$ es a lo más numerable, por si la unión numerable de conjuntos a los más numerables ⇒ A es numerable (contradicción).

⇒ A tiene como mínimo un punto de condensación.

b) Vamos a demostrar viendo que ℝ - P es un abierto.

Sea x$\notin P \Rightarrow \exists \cup (x)$ abierto tal que U(x)∩A es a lo sumo numerable. Entonces si y∈ U(x), como U(x) es un entorno de y que es a lo sumo numerable ⇒ y∉ P, que es el conjunto de los puntos de condensación ⇒ U(x)∩a = Ø si x∉ P ⇒ ℝ - P es un abierto de ℝ ⇒ P es un cerrado de ℝ.

31. Demostrar que todo conjunto B de números reales con un solo punto de acumulación es numerable.

Solución:

Sea A = B – {p} donde p es un punto de acumulación, en concreto, el único punto de acumulación de B.

Como el espacio topológico (ℝ, T) con T la topología usual es Hausdorff ⇒ ∀x∈ B con x ≠ p se tiene que x es un punto aislado ⇒ C es un conjunto de puntos aislados.

Como (ℝ,T) verifica el 2º Axioma de numerabilidad ⇒ (C, T_c) también verifica ⇒ Existe una base numerable de T_c ⇒ los elementos de C que son subconjuntos unitarios y abiertos de T_c son elementos de dicha base ⇒ C es numerable.

⇒ Se tiene que:

- Si p∉ B ⇒ B = C que es numerable
- Si p ∈ B ⇒ B = C∪{p} que será numerable porque C es numerable y p es un elemento.

Entonces B es un conjunto numerable.

32. Demostrar que para dos números reales x<1, y<0, existe un único número entero n tal que x^{n-1}£$y<x^n$.

<u>Solución</u>: supongamos por reducción al absurdo que no existe ningún entero n

tal que $y<x^n$. Esto significa que $y>x^n$ ∀n∈ Z ⇒ y es cota superior del conjunto

M={x^n∈ R: n∈ Z}. Sea μ el supremo de M (ya que al estar acotado superiormente tiene supremo). como x>1 $\Rightarrow \frac{m}{x}$ es menor que $\mu \Rightarrow \frac{m}{x}$ no es cota superior de M $\Rightarrow \exists p\in Z$ /

$\frac{m}{x} < x^p \Rightarrow \mu<x^{p+1} \Rightarrow \mu$ no es cota superior (contradicción) $\Rightarrow\exists n\in Z$ / $y<x^n$.

Análogamente podemos demostrar que existe un entero p tal que $x^p<y$ con p<n evidentemente (por ser x>1). Entonces tomando la sucesión finita $x^p, x^{p+1},..., x^{n-1}, x^n$ y comparando término a término con y podremos encontrar uin entero m tal que $p<m\leq n$ de modo que: $x^{m-1}\leq y< x^m$.

33. Sean a,a´,b,b´ números racionales y g un número irracional. Probar que el número (ag+b) / (a´g+b´) es racional sii $\frac{a}{a´}=\frac{b}{b´}$.

Solución: "$\Rightarrow$" Como $r=\frac{ag+b}{a´g+b´}$ es racional $\Rightarrow$ r(a´γ+b´)=(aγ+b) $\Rightarrow$ γ(a-ra´) = =rb´-b entonces como rb´-b es un número racional y a-ra´ también es racional $\Rightarrow$ (a-a´)= = 0, porque si a-ra´≠0 $\Rightarrow$(a-ra´)∈Q, (rb´-b)∈Q y tendríamos que $g=\frac{rb´-b}{a-ra´}\in Q$ (contradicción) entonces efectivamente a-ra´=0 y en consecuencia rb´-b=0 $\Rightarrow$ r=$\frac{a}{a´}$ y r=$\frac{b}{b´} \Rightarrow \frac{a}{a´}=\frac{b}{b´}$

"$\Leftarrow$" Como $\frac{a}{a´}\in Q \Rightarrow$ sea r=$\frac{a}{a´} \Rightarrow$ r=$\frac{b}{b´}$ y por lo tanto a=ra´ y b=rb´. Por lo tanto:

$$\frac{ag+b}{a´g+b´}=\frac{ra´g+rb´}{a´g+b´}=\frac{r(a´g+b´)}{a´g+b´}=r\in Q \Rightarrow \frac{ag+b}{a´g+b´}\in Q$$

34. Comprobar que es racional el número: $r=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

Solución: Sean x= $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$ e y = $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ entonces haciendo:

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ =

$=(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}})^3+3xy(x+y)+(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})^3=$

$= 20+14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\,\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\,r+20-14\sqrt{2} =$

$= 40+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\;r = 40+3\sqrt[3]{400-392}\;\; r = 40+6r$

$\Rightarrow r^3 = 40+6r \Rightarrow r^3-6r-40 = 0.$

Haciendo Ruffini tenemos:

$$\begin{array}{r|rrr}
1 & 0 & -6 & -40 \\
4 & & 4 & 16 \quad 40 \\
\hline
1 & 4 & 10 & 0
\end{array}$$

$\Rightarrow r^3-6r-40 = (r-4)(r^2+4r+10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r=4 \\ r^2+4r+10=0 \end{cases}$ con $r^2+4r+10=0 \rightarrow$

$r = \dfrac{-4\pm\sqrt{16-40}}{2}$ que no tiene solución real $\Rightarrow$ la única solución real de la ecuación es

$r=4$ que es racional $\Rightarrow \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4 \in Q$.

35. Demuéstrese que la recta racional es un subespacio de la recta real.

Solución: Demostraremos que la base B_Q, subordinada por la base B de R y la base B´ de Q son equivalentes.

Sea $x\in(a,b)\cap Q\in B_Q$ con $a,b\in R$ entonces $\exists p,q\in R$ tales que $(p,q)\subset(a,b)$ con $x\in(p,q)\in B'$.

Recíprocamente, sea $y\in(p,q)\in B'$ con $p,q\in Q$ entonces $y\in(p,q)=(p,q)\cap Q\in B_Q$.

Con lo cual queda demostrado que la recta racional es un subespacio de la recta real.

36. Si el dividendo está aproximado por defecto y el divisor por exceso demostrar que el cociente está aproximado por defecto y su error relativo es menor que la suma de los errores relativos del dividendo y el divisor.

Resolución:

Sea A el dividendo y A´ el divisor. El cociente aproximado será: $\dfrac{A-E}{A'+E'}$ y el error absoluto es:

$$\frac{A}{A'}-\frac{A-E}{A'+E'}=\frac{A(A'+E')-A'(A-E)}{A'(A'+E')}=\frac{AE'+A'E}{A'(A'+E')}<\frac{AE'+A'E}{A'^2}$$

Si dividimos ambos miembros por $\frac{A}{A'}$, el primer miembro representa el error relativo del cociente , y el segundo miembro viene dado por:

$$\frac{AE'+A'E}{A'^2}\cdot\frac{A'}{A}=\frac{AE'+A'E}{AA'}=\frac{E'}{A'}+\frac{E}{A}$$

Por lo tanto, podemos concluir que el error relativo del cociente es menor que la suma

de los errores relativos.

37. El error relativo de la raíz de un número aproximado por defecto es menor que el error relativo de el número aproximado, dividido por el índice de la raíz.

Resolución:

Sea A-E el valor aproximado de A, entonces el error absoluto cometido al aproximar A^5, por ejemplo, es más grande que $5(A-E)^4\cdot E$.

Si tomamos la raíz quinta de A elevada a % se tiene que $\left(\sqrt[5]{A}\right)^5$ =A y el error absoluto es más grande que:

$$5(\sqrt[5]{A-E})^4\cdot E$$

donde E_1 es el error absoluto cometido cuando aproximamos por defecto a $\sqrt[5]{A}$ con $\sqrt[5]{A-E}$, por lo tanto:

$$E> 5\sqrt[5]{(A-E)^4}\cdot E_1 \Rightarrow E_1<\frac{E}{5\sqrt[5]{(A-E)^4}} \Rightarrow \frac{E_1}{5\sqrt[5]{A-E}}<\frac{E}{5(A-E)}$$

y como el error relativo $\frac{E_1}{\sqrt[5]{A}}$ es más pequeño que $\frac{E}{5(A-E)}$ se tiene que:

$$\frac{E_1}{\sqrt[5]{A}}<\frac{E}{5(A-E)}$$

38. Demostrar que la sucesión definida por $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$ con $0<x_1<1$, es convergente. Calcular su límite. Calcular el $\lim_{n\to\infty}$ $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Resolución:

Vamos a demostrar lo primero que x_n es una sucesión que está acotada entre 0 y

1. La demostración de que está acotada la haremos por inducción.

Sea A={n∈N / $0<x_n<1$}.

i) ¿1∈A?

Como $0<x_1<1 \Rightarrow 1\in A$

ii) Supongamos que n∈A, $0<x_n<1$. Veamos si (n+1)∈A, ¿$0<x_{n+1}<1$?

Como $0<x_n<1 \Rightarrow 0<1-x_n<1 \Rightarrow 0<\sqrt{1-x_n}<1 \Rightarrow 0<1-\sqrt{1-x_n}<1 \Rightarrow 0<x_{n+1}<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+1)\in A$.

Entonces A=N.

Por lo tanto x_n es una sucesión que está acotada entre 0 y 1. Vamos a demostrar ahora que x_n es decreciente ∀n.

Sea A={n∈N / $x_{n+1}<x_n$}

i) ¿1∈A?

$x_2<x_1 \Leftrightarrow 1-\sqrt{1-x1}<x_1 \Leftrightarrow 1-x_1<\sqrt{1-x_1}$ es cierto pues como $1-x_1\in(0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{1-x_1}>1-x_1 \Rightarrow 1\in A$.

ii) Supongamos que es cierto que n∈A, $x_{n+1}<x_n$. Veamos que (n+1)∈A,

¿$x_{n+2}<x_{n+1}$?.

Como $x_{n+1}<x_n \Rightarrow -x_n<-x_{n+1} \Rightarrow 1-x_n<1-x_{n+1} \Rightarrow \sqrt{1-x_n}<\sqrt{1-x_{n+1}} \Rightarrow$

$-\sqrt{1-x_{n+1}}<-\sqrt{1-x_n} \Rightarrow 1-\sqrt{1-x_{n+1}}<1-\sqrt{1-x_n} \Rightarrow x_{n+2}<x_{n+1} \Rightarrow (n+1)\in A \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A=N $\Rightarrow x_n$ es decreciente ∀n∈N.

Como x_n es decreciente y está acotada inferiormente por 0 $\Rightarrow x_n$ es convergente.

Ya que x_n es convergente, se cumple pues que:

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$.

Entonces:

$L=1-\sqrt{1-L} \Rightarrow \sqrt{1-L}=1-L \Rightarrow (1-L) = (1-L)^2 \Rightarrow (1-L)-(1-L)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$(1-L)(1-1+L) = 0 $\Rightarrow$L(1-L) = 0 $\Rightarrow$ L=0 ó L=1 pero L$\neq$1 porque 0<x_1<1, y x_n es decreciente $\Rightarrow$ L=0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt{1-x_n}}{x_n} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\sqrt{1-x_n})(1+\sqrt{1-x_n})}{x_n(1+\sqrt{1-x_n})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2-\left(\sqrt{1-x_n}\right)^2}{x_n(1+\sqrt{1-x_n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1+x_n}{x_n(1+\sqrt{1-x_n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_n(1+\sqrt{1-x_n})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{1+\sqrt{1-x_n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$