39. Comprobar que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$ es convergente, y en caso de serlo, calcular su suma.

Resolución:

Para comprobar su convergencia aplicaremos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} = \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$ por lo tanto la serie es convergente.

Vamos a sumar la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{2^j} = \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{donde } S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{2^j}$$

$$S_n = \frac{1}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{9}{3^2}+\frac{16}{2^4}+\frac{25}{2^5}+\ldots+\frac{n^2}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2}+\frac{4}{3^2}+\frac{9}{2^4}+\frac{16}{2^5}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{2^n}+\frac{n^2}{2^n}$$

Restandо:

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\frac{9}{2^5}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\frac{n^2}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\frac{7}{2^5}+\ldots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}+\frac{n^2}{2^{n+2}}$$

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\frac{2}{2^5}+\ldots+\frac{2}{2^n}+\frac{(n-1)^2}{2^{n+1}}-\frac{n^2}{2^{n+2}}$$

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{(n-1)^2}{2^{n+1}}-\frac{n^2}{2^{n+2}}$$

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{1}{2}+2\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right)+\frac{(n-1)^2}{2^{n+1}}-\frac{n^2}{2^{n+2}}$$

$$S_n = 2+8\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}\right)+\frac{(n-1)^2}{2^{n+1}}-\frac{n^2}{2^{n+2}}$$

S= $\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty} 2+16\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\frac{(n-1)^2}{2^{n+1}}-\frac{n^2}{2^{n+2}} = 2+16\frac{1}{4}=\boxed{6}$

40. Hallar cuántos números menores que 1000 son primos con 29 y 13. Hallar también la suma de los números no primos con 29 y 13 menores que 1000.

Resolución:

Como hay 999 números menores que 1000, vamos a ver cuáles de ellos no son primos con 13 y 29.

Como 13 y 29 son primos entre sí, vamos a calcular el mínimo común múltiplo de 13 y 29, que es: 377, que como es menor que 1000 hay que descontarlo . Pero 2·3777=754, que también es menor que 1000, y habrá que descontarlo. Y para terminar tenemos 3·377 = 1131 que es mayor que 1000.

Entonces hay 997 número menores que 1000 y primos con 29 y 13.

Por otro lado, la suma de los no primos con 29 y 13 menores que 1000 es 377+754=1131.

41. Calcular la arista del menor cubo en el que se pueden acoplar sin dejar espacios vacíos un número entero de ortoedros iguales cuyas dimensiones expresadas en cm son $C_{5,2}$, P_3 y el módulo de 8+6i. ¿Cuántos ortoedros pueden acoplarse?

Resolución:

Calcularemos primero las dimensiones de los ortoedros:

$C_{5,2}=\frac{5!}{3!\,2!}=10$

$P_3=3! = 6.$

$18+6i = \sqrt{64+36}=10$

Buscaremos ahora quién es el mínimo común múltiplo de estos valores.

$$\left.\begin{array}{l} 10=2\cdot 5 \\ 6=2\cdot 3 \\ 10=2\cdot 5 \end{array}\right\} m.c.m.(10,6)=30$$

Por lo tanto la arista del menor cubo será de 30 cm. El número de ortoedros vendrá dado por:

$\frac{30}{10}\cdot\frac{30}{6}\cdot\frac{30}{10}=3\cdot 5\cdot 3=45 \rightarrow$ se podrán acoplar 45 ortoedros.

42. Hallar el exponente de 3 en 2121.

Resolución:

Si dividimos sucesivamente el 2121 por 3, tenemos que:

$$\begin{array}{llllllll} 2121 & \underline{|\ 3\quad} & & & & & & \\ 021 & 77 & \underline{|\ 3\quad} & & & & & \\ 0 & 17 & 25 & \underline{|\ 3\quad} & & & & \\ & 2 & 1 & 8 & \underline{|\ 3\quad} & & & \\ & & & 2 & 2 & & & \end{array}$$

Por lo tanto el exponente de 3 en 2121 es: 77+25+8+2=112.

La solución es 112.

43. Hallar la última cifra en la que acaba el número 4^{5932}.

Resolución:

Veamos cuáles son los restos potenciales de 4 módulo 10, para intentar establecer, en caso de que sea posible, una recurrencia en dichos restos.

$4^0 = 1 \pmod{10}$

$4^1 = 1 \pmod{10}$

$4^2 = 1 \pmod{10}$

$4^3 = 1 \pmod{10}$

$4^4 = 1 \pmod{10}$

$4^5 = 1 \pmod{10}$

$4^6 = 1 \pmod{10}$

Como podemos observar cuando el exponente del 4 es par el resto módulo 10 es 6, pero si el exponenete es impar el resto módulo 10 es 4. Como el exponente en este problema es $5932 = 2 \cdot 2966$ que es par se tiene que la última cifra en la que acaba el número 4^{5932} es el 6.

44. Encontrar el criterio de divisibilidad por 5 en base 12, y aplicárselo al número $12x75_{12}$ hallando x para que sea divisible por 5.

Resolución:

Tomando los restos potenciales de 12 módulo 5, se tiene que:

$12^0 = 1 \pmod{10}$

$12^1 = 1 \pmod{10}$

$12^2 = 1 \pmod{10}$

$12^3 = 1 \pmod{10}$

$12^4 = 1 \pmod{10}$

Entonces si tomamos un número N= $abcde_{12)}$ es divisible por 5 $\Leftrightarrow$ $e+2d-c-2b+a = \begin{cases} 0 \\ \dot{5} \end{cases}$. Aplicando el caso $12x75_{12)}$ es divisible por 5 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5+14-x-4+1 = \begin{cases} 0 \\ \dot{5} \end{cases} \Leftrightarrow 16-x = \dot{5} \Rightarrow x=1$ ó $x=6$.

45. Hallar cuántos números menores que 1342 son primos con 19 y 53. Hallar también la suma de los números no primos con 19 y 53 menores que 1342.

Resolución:

Como sabemos, hay 1341 números menores que 1342. Las que no son primos on 19 y 53 a la vez, son aquellos que sean múltiplos de m.c.m.(19,53) = 1007. Como 1007<1342 y no es pirmo con 19 y 53, habrá que descontarlo.

Por lo tanto, números menores que 1342 primos con 19 y 53 hay 1340. La suma de los números no primos 19 y 53 y que sean menores que 1342 es 1007, porque sólo hay ese.

46. Al número natural m_0 no cuadrado perfecto, se le suma su exce3so sobre el máximo cuadrado en él contenido y se obtiene el número m_1. Operando de modo análogo con m_1, resulta el número m_2, y así sucesivamente. Demostrar que la sucesión $m_1, m_2, m_3, \ldots$ es indefinida, es decir, no contiene ningún cuadrado.

Solución:

Sea m_0 el número antes expuesto, entonces:

$n^2 < m_0 < (n+1)^2 \Rightarrow m_1 = m_0 + (m_0 - n^2) + 2n + 1 = n^2 + 4n + 2 < (n+2)^2$

Como $m_1 = 2m_0 - n^2 \Rightarrow$ dado que $2m_0$ es par $\Rightarrow m_1$ será par o impar dependiendo de que n^2 sea par o impar respectivamente. $\Rightarrow m_1$ tiene la misma paridad que $n^2 \Rightarrow m_1$ tiene distinta paridad que $(n+1)^2 \Rightarrow m_1$ no es de la forma $(n+1)^2 \Rightarrow m_1$ no es un cuadrado perfecto. Y reiterando el proceso se tiene que m_i no es cuadrado perfecto $\forall i \in N$.

47. En una provincia española el número correspondiente a la última matrícula de vehículos concedido hasta esta fecha es el 46000. Hállese el número de vehículos cuyos números de matrícula son capicuas de cinco cifras.

Solución:

Como los números capicúas son de la forma abcba una vez fijadas las tres primeras cifras las otras dos vienen obligadas, por lo tanot bastará con estudiar las posibilidades que tenemos con las tres primeras, es decir:

$V_{10,3}=10^3=1000$

pero:

a) Hay que descontar los que empiezan por x>4 (5,6,7,8 y 9) o por 0, es decir:

$5 \cdot V_{10,2}=6 \cdot 100=1000$

b) Las que tienen por primera cifra un 4 y por segunda un 6,7,8 ó 9.

$4 \cdot V_{10,1}=40.$

Entonces las solución es: 1000-600-40 = 360

$\boxed{N=360.}$