55. Supongamos que la función g está definida y es derivable en [0,1]. Supongamos que g(0)<0<g(1), 0<a£g´(x)£b donde a y b son constantes. Probar que existe una constante M tal que la solución de la ecuación g(x)=0 se puede econtrar aplicando el algoritmo de iteración a la función f(x)=x+Mg(x), ¿para qué valores de M la sucesión definida por x_{n+1}=f(x_n) converge cuadráticamente a la solución a de g(x)=0?

a) |f´(x)| = |1+Mg´(x)|<1

$$-1<1+mg´(x)<1 \Rightarrow -2<Mg´(x)<0 \Rightarrow \frac{-2}{g(x)}<M<0 \text{ como } \frac{-2}{a} \leq \frac{-2}{g(x)} \leq \frac{-2}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{b} < M < 0$$

x_0=2

f(0)=Mg(0)>0

f(1)=Mg(1)<0

$f´(x)=1+Mg´(x)\geq 0 \Rightarrow M \geq \frac{-1}{g´(x)}$ como $\frac{-1}{a} \leq \frac{-1}{g´(x)} \leq \frac{-1}{b} \Rightarrow M \geq \frac{-1}{b}$

$\Rightarrow \frac{-1}{b} \leq M < 0$ para que f sea Lipschitziana de $[0,1] \to [0,1]$ con constante de Lipschitz M

b) Debe cumplir que:

con f(α)=α; f´(x)=0

$$f´(x)=1+Mg´(x) = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{-1}{g´(x)}$$

56. Mostrar que la función F(x)=x-e^{-x} satisface las condiciones de convergencia global del método de Newton en el intervalo [0,1]. Resuelve la ecuación F(x)=0 comenzando en x_0=0´5.

i) F(a)·F(b)<0 — F(0)= 0 -e^0=-1

F(0)·F(1)<0 — $F(1) = 1-e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = 0´632120558$

F(0)·F(1) = (-1)·0´632120558= -0´6321...

ii) $F´(x)\neq 0\ \forall x\in[a,b]$

$F´(x)\neq 0\ \forall x\in[0,1]$

$F´(x)=1+e^{-x} = 1+\frac{1}{e^x}$ como $1>0$ y $\frac{1}{e^x}>0 \Rightarrow 1+\frac{1}{e^x}>0\ \forall x\in[0,1]$

$\Rightarrow F´(x)\neq 0\ \forall x\in[0,1]$

iii) $F´´(x)\geq\ \forall x\in[a,b]$ ó $F´´(x)\leq 0\ \forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow F´´(x) = e^{-x}=\frac{-1}{e^x}$ como $\frac{1}{e^x}>0\ \forall x\in R \Rightarrow F´´(x)<0\ \forall x\in[0,1]$

iv) Si c es el extremo del intervalo [a,b] donde |F´(x)| es menor entonces $\left|\frac{F(c)}{F´(c)}\right|\leq b-a$

F´(x)=1+1/e donde F´(x) es menor es para x=1 con F´(1) = 1+1/e. Entonces c=1

$$\left|\frac{F(1)}{F´(1)}\right|\leq 1-0 \Rightarrow \left|\frac{1-e^{-1}}{1+e^{-1}}\right|\leq 1 \Rightarrow \left|\frac{1-\frac{1}{e}}{1+\frac{1}{e}}\right| = \left|\frac{1-\frac{1}{e}}{\frac{e+1}{e}}\right| = \left|\frac{e-1}{e+1}\right|\leq 1 \quad \text{Si}$$

$F(x)=x-e^{-x}$

$F´(x)=1+e^{-x}$ $\qquad x_0=0´5$

$x_1=x_0-\frac{F(x_0)}{F´(x_0)}=0´5-\frac{0´5-e^{-0´5}}{1+e^{-0´5}} = 0´566311003$

$x_2=0567143$

$x_3=0´567143$

$\Rightarrow$ La $x\in[0,1]$ / F(x)=0 es x=0´567143

57. Calcular $\sqrt{p}$ con nueve cifras decimales exactas.

Utilizaremos $F(x)=x^2-\pi$ en [1,3].

Veremos que cumple las condiciones del Teorema global de Newton.

i) $F(1)=1-\pi<0$, $F(3)=9-\pi>0 \Rightarrow F(1)\cdot F(3)<0$

ii) $F´(x)=2x$

$F´(x)\neq 0\ \forall x\in[1,3]$

iii) $F''(x)=2 \geq 0 \ \forall x \in [1,3]$

iv) c=1

$$\left|\frac{F(1)}{F'(1)}\right| = \left|\frac{1-p}{2}\right| = 1'07079 \leq 2$$

Sea $x_0=2$

$x_1=1785398163$

$x_2=1'772500775$

$x_3=1'772453852$

$x_4=1'772453851$

$x_5=1'772453851$

$\Rightarrow \sqrt{p}$ =1´772453851

Hay que calcular el error:

$|x_n-\alpha| \leq \frac{L^n}{1-L} | x_0 - x_1 | < 10^{-q}$ f(x)= $\frac{1}{2}(x+\frac{p}{x})$ $|f'(x)<1$ [1´5,2]

$x_0=2$

$x_1=1'783 \Rightarrow n=18$ habrá que afinar decimales exactas

$f'(x)= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{p}{x^2}$ L=f´(2)

58. Determinar el único cero positivo del polinomio $p(x)=x^3+x^2-x-1$ por el método de Newton.

Cogemos $F(x) = x^3+x^2-x-1$ en [1´5,2´5].

i) F(1´5)=-1´375<0

F(2´5)=5´875>0

F(1´5)·F(2´5)<0

ii) $F'(x)=3x^2-2x-1$

$F'(x) \neq 0 \ \forall x \in [1'5,2'5]$

F´(1´5) = 2´75 y es creciente.

iii) $F''(x)=6x-2 > 0 \ \forall x \in [1'5,2'5]$

$$\left|\frac{F(1'5)}{F'(1'5)}\right| = \left|\frac{-1'375}{2'75}\right| = \left|\frac{1'375}{2'75}\right| < 1$$

Sea $x_0=2$

$x_1=1'857142857$

$x_2=1'839544513$

$x_3=1'839286810$

$x_4=1'839286755$

$x_5=1'839286757$

Su raíz positiva es x=1´839286757

59. Supongamos que y está definido por la fórmula y=$\sqrt{z+\sqrt{z+\sqrt{z+\ldots}}}$ donde z$\in$(0,+∞). a) Busca un método iterativo para calcular y determinando para que valores la iteración converge. b) Calcular y.

a) $f(x)=\sqrt{z+x}$

$x_0=0$

$x_1=f(0)=\sqrt{z}$

$x_2=f(x_1)=\sqrt{z+\sqrt{z}}$

.

.

.

$x_n=f(x_{n-1})=\sqrt{z+\sqrt{z+\sqrt{z+\ldots}}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(x)$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{z+x}}$ decreciente

$f'(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$

$f'(x)<f'(0)<1 \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{z}}<1 \Rightarrow \dfrac{1}{2}<\sqrt{z} \Rightarrow z>\dfrac{1}{4}$

$f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ $\qquad L=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$

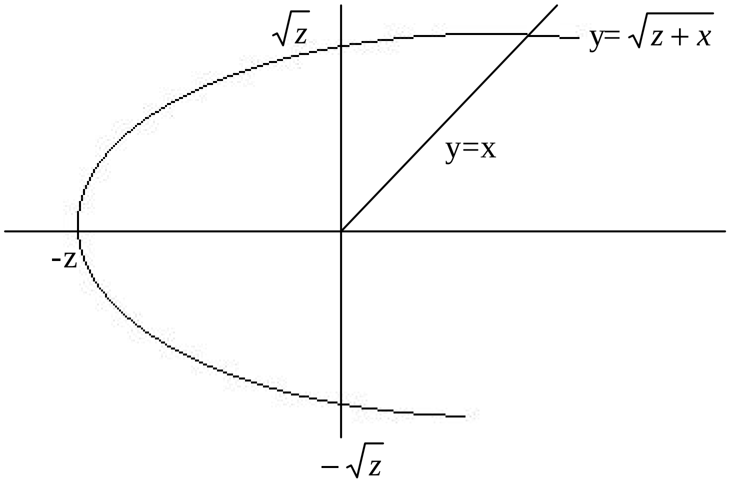
$\sqrt{z+x}=x$

$x^2=z+x$

x^2-x-z

x=$\dfrac{1\pm\sqrt{1+4z}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{1+4z}}{2}$

b)



z< $\dfrac{1}{4}$ f:[a,+∞)→[a,+∞)

f´(x)<f´(a)<1 f´(a)= $\dfrac{1}{2\sqrt{a+z}}$

$\dfrac{1}{4}<a+z \rightarrow \dfrac{1}{4}-z<a$ y $\forall x_0\in$ [a,+∞)

$x_n=\sqrt{z+\sqrt{z+...+\sqrt{x_0}}} \rightarrow y$

porque el punto fijo es único.

60. Probar que la ecuación x=1-tg^{-1}(x) tiene solución a . Encontrar un ijtervalo [a,b] que contenga a a tal que para cualquier x_0 Î [a,b], la iteración x_{m+1}=1+tg^{-1}(x_m) m ³ 0 tienda hacia x. Calcular las primeras iteradas y ver la rapidez de convergencia.

x=1+arctg(x)

1) ¿Tiene solución?

Sea f(x)=1+arctg(x)-x, cojamos [1,3]:

f(1)=0´7854

f(3)-0´7509

⇒ como f es continua en [1,3] y se tiene que f(1)·f(3)<0, aplicando el teorema de Bolzano ⇒∃c∈ [1,3] tal que f(c)=0 ⇒f(c)=1+arctgc-c = 0 ⇒ c = 1+ arctg c

2) Para el intervalo [1,3] tenemos que si $f(x_n)=1+tg^{-1}(x_n) \Rightarrow$ se cumple que $f:[1,3]\to[1,3]$ y [1,3] contiene c / f(c)=c y además $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ y se cumple que: $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}<1\ \forall x\in[1,3] \Rightarrow$ f es lipschitziana (contractura)$\Rightarrow \forall x_0\in[1,3]$ $x_{m+1}=1+tg^{-1}(x_m)$ $m\geq 0$ tiende hacia c.

61. Probar que el grupo simétrico S_m puede obtenerse a partir del ciclo de m elementos y de una transposición.

<u>Solución:</u>

Sea el ciclo C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3.... & m-1 & m \\ 2 & 3 & 4.... & m & 1 \end{pmatrix}$ y consideremos la transposición T=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; el ciclo inverso C^{-1} que operado con C nos da la identidad es:

C^{-1} = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3.... & m \\ m & 1 & 2.... & m-1 \end{pmatrix}$. Vamos a considerar las sustituciones obtenidas mediante el producto C^{-h}. T C^h siendo h un exponenete que puede tomar valores entre 0 y m-1. Así por ejemplo para h=0, resulta la misma T, ya que C^0=identidad. Para h=1 tendremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3.... & m \\ m & 1 & 2.... & m-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3.... & m-1 & m \\ 2 & 3 & 4.... & m & 1 \end{pmatrix}$$

Es una transposición $\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ ya que todos los elementos permanecen invariantes excepto esos dos.

$1 \to 2 \to 1 \to m$

$m \to 1 \to 2 \to 1$

Vamos a generalizarlo para una potencia cualquiera.

C^h=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3.... & m-1 & m-h+1 & m-h+2.... & m-1 & m \\ 1+h & 2+h & 3+h.... & m & 1 & 2....... & h-1 & h \end{pmatrix}$

C^{-h}=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3.... & h & h+1 & h+2 & h+3... & m \\ m-h+1 & m-h+2 & m-h+3.... & m & 1 & 2 & 3... & m-h \end{pmatrix}$

El producto $C^{-h} \cdot T \cdot C^{h}$ mantiene invariantes todos los elementos excepto el m-h+1 y el m-h+2. En efecto:

$$m-h+1 \to 1 \to 2 \to m-h+2$$

$$m-h+2 \to 2 \to 1 \to m-h+1$$

Es decir, haciendo h=2 obtenemos la transposición:

$$\begin{pmatrix} m & m-1 \\ m-1 & m \end{pmatrix}$$

Haciendo h = 3 tendremos $\begin{pmatrix} m-1 & m-2 \\ m-2 & m-1 \end{pmatrix}$. Para el valor h=m-1 resulta $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Es decir, tendresmos el conjunto de transposiciones:

(2,1); (1,m); (m,m-1); ....(5,4); (4,3); (3,2)

Recordemos que según un teorema toda sustitución de un grupo simétrico S_m puede escribirse como producto de transposiciones. Por otra parte, una transposición cualquiera (a,b) puede expresarse mediante un producto de transposiciones del conjunto anterior:

Supongamos a>b

(a,b) = (a,a-1) (a-1,a-2)(a-2,a-3)...(b+2,b+1), (b+1,b) (b+1,b+2)...(a-2,a-1) (a-1,a)

En efecto:

a → a-1 → a-2 → ... → b+2 → b+1 → b+1 → b

a-1 → a → a-1 → ....

a-2 → a-1 → a-2 ....

....

b+2 → b+3 → b+2

b+1 → b+2 → b+1

b → b+1 → b+2 .... → a-2 → a-1 → a

Resumiendo una sustitución cualquiera puede expresarse como producto de transposiciones y éstas, a su vez, vienen dadas como productos de trasnposiciones del conjunto anterior.

62. En el conjunto P de los números enteros pares se definen dos operaciones: una de ellas es la adición ordinaria y la otra hace corresponder a dos elementos x, y, el elemento producto xy/2. Demostrar que P tiene estructura de anillo.

Solución:

Veamos que el conjunto P con la adición ordinaria es un subgrupo del grupo aditivo de los enteros.

Bastará comprobar que si $x \in P$, $y \in P$ entonces:

$x * y^{-1} \in P$. En efecto:

Si $\left.\begin{array}{l} x \in P \Rightarrow x = 2K \\ y \in P \Rightarrow y = 2h \end{array}\right\}$ $x * y^{-1} = 2k + (-2h) = 2(k-h)$, luego $x * y^{-1} \in P$.

Por consiguiente P respecto a la primera operación tiene estructura de grupo, que además es abeliano ya que la adición ordinaria es conmutativa.

La segunda operación definida en P es cerrada; basta observar que si x=2, y=2 también $x \otimes y = xy/2$ es múltiplo de dos.

Se verifica la propiedad asociativa:

$$x \otimes (y \otimes z) = x \otimes (yz/2) = \frac{x \cdot \frac{y \cdot z}{2}}{2} = \frac{xyz}{4}$$

$$(x \otimes y) \otimes z = (xy/2 \otimes z) = \frac{\frac{xy}{2} z}{2} = \frac{xyz}{4}$$

Es fácil ver que se cumplo la propiedad distributiva a derecha e izquierda, puesto que: $x \otimes (y * z) = x \otimes (y + z) = \dfrac{x(y+z)}{2}$

$$(x \otimes y) * (x \otimes z) = xy/2 + xz/2 = \frac{x(y+z)}{2}$$

Análogamente se comprobaría a la derecha:

$(y * z) \otimes x = (y \otimes x) * (z \otimes x)$