63. Dados tres vectores cualesquiera del espacio ordinario de la geometría clásica de tres dimensiones, demostrar que la condición necesaria y suficiente para que sean linealmente independientes es que no sea nulo su producto mixto.

Solución:

Sean los vectores

$a=(x_1\ y_1\ z_1)$; $b=(x_2\ y_2\ z_2)$; $c=(x_3\ y_3\ z_3)$

La independencia lineal exige:

$\lambda^1{}_a+\lambda^2{}_b+\lambda^3{}_c=0 \Leftrightarrow \lambda^1=\lambda^2=\lambda^3=0$. Expresando las igualdades escalares:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^1 x_1 + \lambda^2 x_2 + \lambda^3 x_3 &= 0 \\ \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 &= 0 \\ \lambda^1 z_1 + \lambda^2 z_2 + \lambda^3 z_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

La condición necesaria y suficiente para que un sistema homogéneo tenga soluciones diferentes de la impropia, es decir, soluciones distintas de $\lambda^1=\lambda^2=\lambda^3=0$ es que el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Por consiguiente, si dicho determinante es diferente de cero, la igualdad vectorial $\lambda^1{}_a+\lambda^2{}_b+\lambda^3{}_c=0$ sólo se cumple cuando $\lambda^1=\lambda^2=\lambda^3=0$; pero dicho determinante es la expresión del producto mixto de dichos vectores a,b,c.

64. Demuéstrese que el conjunto C={(x,y,z,-x): x,y Î R} con una operación suma definida así:

(x,y,y,-x)+(w,z,z,-w) = [x+w,y+z,y+z, -(x+w)] y con el producto por un escalar k Î R definido por:

k(x,y,y,-x)=(kx,ky,ky,-kx) constituye un espacio vectorial de dos dimensiones.

Solución:

Demostremos que C es un subespacio del espacio vectorial R^4. Para ello basta comprobar el carácter cerrado respecto a la suma de vectores y respecto al producto por un escalar.

En efecto:

$(x,y,y,-x)+(w,z,z,-w) = [x+w,y+z,y+z,-(x+w)]\in C$

$k(x,y,y,-x) = (kx,ky,ky,-kx)\in C$

Una base de dicho espacio vectorial está formada por los vectores (0,1,1,0) y (1,0,0,-1).

1º) Son linealmente independientes. Es obvio, ya que ninguno de ellos puede obtenerse multiplicando el otro por un escalar.

2º) Además, cualquier vector de C puede expresarse como una combinación de estos dos:

$(x,y,y,-x) = x(1,o,o,-1)+y(0,1,1,0)$

Como todas las bases de un espacio tienen el mismo número de vectores, queda demostrado que la dimensión es dos.

65. Sea A un anillo conmutativo y con uno, N_A su nilradical. Demostrar que las condiciones siguientes son equivalentes:

i) A tiene un único idel primo.

ii) Todo elemento de A es unidad o está en N_A (es decir, es nilpotente).

iii) A/ N_A es un cuerpo.

Solución:

i) $\Rightarrow$ ii)

Sea $x\in A$, si x es unidad ya está demostrado, si no es unidad entonces (x) es un ideal propio, luego está contenido en un ideal maximal y por tanto en un ideal primo, como solo existe un ideal primo, P, se sigue que

$x\in \cap P_i = P$, P_i primo $\Rightarrow x\in N_A$,

y en consecuencia x es nilpotente.

Obsérvese que la intersección de todos los ideales primos de un anillo es el nilradical.

ii) $\Rightarrow$ iii)

Sea $x+ N_A \neq 0$ entonces $x\notin N_A$ $\Rightarrow$ x no es nilpotente

$\Rightarrow$ x es unidad

$\Rightarrow \exists\ y + N_A = (x+ N_A)^{-1}$, entonces A/N_A es un cuerpo.

iii) $\Rightarrow$i)

Supongamos que A tiene más de un ideal primo, sean P y Q dos ideales primos distintos de A, entonces existe un $x\in A$ que está en uno de ellos y no en el otro.

Sea $x\in P$, $x\notin Q$, entonces $x\notin N_A = \cap P_i$, P_i primo, luego

$$\begin{aligned} x+N_A \neq 0 &\Rightarrow x+N_A \text{ es una unidad en } A/N_A \\ &\Rightarrow \exists x+N_A \,/\, (x+N_A)(y+N_A) = 1+N_A. \\ &\Rightarrow xy-1 \in N_A \\ &\Rightarrow xy-1\in P \\ &\Rightarrow 1\in P, \text{ pues } x\in P \end{aligned}$$

luego P=A, contradicción.

66. Resolver la ecuación $x^2+2y^2=z^2$ en el anillo de los números enteros.

Solución:

* Sea d el máximo común divisor de x e y, es decir, d=m.c.d.(x,y), entonces

$$x=dx_1,\ y=dy_1$$

y sustituyendo en la ecuación dada, resulta:

$$d^2x^2_1+2d^2y^2_1=z^2$$

es decir $\quad d^2(x^2_1+2y^2_1)=z^2$

de donde se sigue que d es un divisor de z, y por tanto, $z=dz_1$. Sustituyendo en la ecuación anterior resulta:

$$d^2(x^2_1+2y^2_1)=d^2z^2_1$$

$$x^2_1+2y^2_1)=z^2_1 \qquad (1)$$

La ecuación dada y la ecuación (1) son de la misma forma, y las soluciones de ambas son proporcionales, es decir, si (a,b,c) es una solución de (1) la terna (da,db,dc) es una solución de la dada.

Por tanto, supondremos que m.c.d.(x,y,z) = 1, m.c.d.(x,y) = 1, y también que m.c.d.(x,z) = 1 y m.c.d.(y,z)=1.

* De lo anterior se deduce que x es un número impar. Puesto que $2y^2$ es par, z^2 es impar y, por tanto, z es impar.

* De la ecuación dada se sigue que:

$$2y^2 = z^2-x^2 = (z+x)(z-x), \qquad (2)$$

Puesto que x y z son impares, los números z+x y z-x son pares. Veamos además que el máximo común divisor de z+x y z-x es 2. En efecto si d es su máximo común divisor se tiene:

$$z+x = da,\ z-x = db$$

con a y b números primos entre sí. De estas relaciones se obtienen:

$$2z = d(a+b)$$

$$2y = d(a-b)$$

Puesto que m.c.d.(x,z) = 1 se sigue que m.c.d.(2z,2y) = 2 y por tanto, d=2. De la ecuación (2) y teniendo en cuenta el resultado anterior, deducimos que: $\frac{1}{2}(z+x)$ *ó* $\frac{1}{2}(z-x)$ es impar.

Por tanto, son primos entre sí los números

$$z+x \quad y \quad \frac{1}{2}(z-x)$$

ó los números

$$z-x \quad y \quad \frac{1}{2}(z+x).$$

En el primer caso de la igualdad,

$$y^2=(z+x)\left(\frac{z-x}{2}\right)$$

se deduce que y^2 es un cuadrado que

$$\begin{cases} z+x=n^2 \\ z-x=2m^2 \end{cases} \quad (3)$$

y de la segunda posibilidad tenemos que:

$$\begin{cases} z-x=n^2 \\ z+x=2m^2 \end{cases} \quad (4)$$

siendo m y n números enteros, m impar.

i) Del sistema (3) y de la ecuación (2) obtenemos:

$$* \ z=\frac{1}{2}(n^2+2m^2),\ \ x=\frac{1}{2}(n^2-2m^2),\ \ y=nm, \quad (5)$$

ii) Del sistema (4) y de la ecuación (2) obtenemos:

$$* \ \frac{1}{2}(n^2+2m^2), \ \ x=\frac{1}{2}(2m^2-n^2), \ \ y=nm, \quad (6)$$

Las fórmulas (5) y (6) pueden reunirse en la siguiente:

$$* \ x=\pm\frac{1}{2}(n^2-2m^2), \ \ z=\frac{1}{2}(n^2+2m^2), \ \ y=nm, \quad (7)$$

con m, como ya hemos dicho, impar. Más aún, para que x y z sean números enteros, los paréntesis de (7) deben ser números pares, lo que implica que n debe ser para ya que $2m^2$ lo es.

* Poniendo n=2u y m=v, las fórmulas generales que dan las soluciones de la ecuación dada, suponiendo que x,y,z son enteros positivos sin divisor común mayor que 1, son:

$$* \ x=\pm(u^2-2v^2), \ y=2uv, \ z=u^2+2v^2, \qquad (8)$$

siendo u y v números enteros positivos primos entre sí y v impar.

Por tanto, las fórmulas (8) dan todas las soluciones de la ecuación dada en números enteros positivos y primos entre sí, para ello basta elegir a y b de mod que x sea positivo. Por otra parte, estas ecuaciones satisfacen, como puede comprobarse sustituyendo la ecuación dada.

Finalmente señalemos que las restantes soluciones se obtienen a partir de éstas multiplicando por un número cualquiera entero d o poniendo signos arbitrariamente.

67. Dada la ecuación $x^2+y^2=z^2$, (1), se pide:

a) Resolver dicha ecuación en el anillo de los enteros.

b) A cada solución s(a,b,c) encontrada se le asocia el número complejo w=$\frac{a+bi}{c}$. Probar que la multiplicación en el conjunto de los números complejos así construidos subordina en el conjunto de soluciones enteras de la ecuación una ley interna. Estudiar las propiedades de esta ley.

<u>Solución:</u>

a) Para números enteros positivos, se trata evidentemente de valores que verifican el teorema de Pitágoras. Por eso cada terna que verifica la ecuación se dice que está formada por números pitagóricos.

* Sea d el máximo común divisor de x e y, es decir, d=m.c.d.(x,y), entonces

$x=dx_1$, $y=dy_1$

y sustituyendo en la ecuación pitagórica, resulta:

$d^2x^2_1+d^2y^2_1=z^2$

es decir $d^2(x^2_1+y^2_1)=z^2$

de donde se sigue que d es un divisor de z, y por tanto, $z=dz_1$. Sustituyendo en la ecuación anterior resulta:

$d^2x^2_1+d^2y^2_1=d^2z^2_1$

$x^2_1+y^2_1=z^2_1$ (2),

La ecuación (2) es también de la misma forma que la dada, y las soluciones de amas son proporcionales, es decir, si (a,b,c) es una solución de (2), (da,db,dc) es una solución de (1).

Por tanto, para resolver la ecuación (1) es suficiente limitarse al caso en que los valores x e y son primos entre sí, es decir, m.c.d.(x,y)=1.

* Si m.c.d.(x,y)=1 entonces al menos uno de los números es impar; sin perder generalidad podemos suponer que es, por ejemplo, x. De la ecuación (1) se tiene:

$x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y)$

Sea d_1=m.c.d.(z+y,z-y) entonces podemos escribir que

$z+y=d_1a$, $z-y=d_1b$, m.c.d.(a,b)=1

luego $x^2=abd^2_1$, (3).

Puesto que los números a y b son primos entre sí, la ecuación anterior es cierta si a y b son cuadrados perfectos, es decir,

$a=m^2$ y $b=n^2$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3) obtenemos:

$x^2=m^2n^2d^2_1$,

es decir $x=mnd_1$ (4)

De las relaciones

$$\begin{cases} z+y=ad_1=m^2d_1 \\ z-y=bd_1=n^2d_1 \end{cases}$$

se obtiene: $2z=(m^2+n^2)d_1$

$2y=(m^2-n^2)d_1$ (5)

y de aquí

$$z = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)d_1 \qquad (6)$$

$$y = \frac{1}{2}(m^2 - n^2)d_1 \qquad (7)$$

Es evidente que los números m,n y d_1 son impares ya que $x=mnd_1$ es un número impar, según hemos supuesto. Más aún, $d_1=1$, ya que en caso contrario $d_1$sería un divisor de x e y, basta tener en cuenta las relaciones (4) y (5), ya que en (5) d_1 dividiría a y por no ser d_1 par. Contradicción con la hipótesis de que x e y son primos entre sí.

Puesto que $d_1=1$, las relaciones (4), (6) y (7) se reducen a:

x=mn, $\quad y = \frac{1}{2}(m^2 - n^2)d_1 \quad z = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)d_1$, (m>n), (8)

siendo m y n números impares y primos entre sí. Estas fórmulas nos permiten obtener todas las ternas de números enteros positivos sin divisores comunes, y que verifican la ecuación pitagórica (1).

Ejemplos:

*Si n=1 y m=3 se tiene la terna clásica: (3,4,5)

*Si n=1 y m=5 se obtiene la terna: (5, 12, 13).

*Si n=3 y m=5 se obtiene la terna: (15,8,17).

Las soluciones que se derivan de las fórmulas (8) son aquellas que no tienen divisores comunes; las restantes se obtienen a partir de estas multiplicando por un entero arbitrario d o poniendo arbitrariamente signos a x,y,z.

b) Sea (a,b,c) una solución de la ecuación pitagórica, entonces el número complejo asociado es: w= $\frac{a+bi}{c}$.

Para que este cociente tenga sentido c debe ser evidentemente distinto de cero, luego la solución nula (0,0,0) de la ecuación pitagórica no tiene asociado ningún número complejo.

Por otra parte, es también evidente que dos soluciones proporcionales tienen el mismo número complejo por imagen, es decir, la aplicación de S*=S-{0,0,0} en C no es inyectiva.

Teniendo en cuenta que

$$(a,b,c) \to \frac{a+bi}{c}$$

$$(d,e,f) \to \frac{d+ei}{f}$$

y que,

$$\frac{a+bi}{c} \cdot \frac{d+ei}{f} = \frac{(ad-be)+(ae+bd)i}{cf}$$

se puede definir formalmente una operación de SxS en S de la siguiente forma, obviando las dificultades anteriores:

(a,b,c)*(c,d,e) = (ad-be, ae+bd, cf)

- a) * es una operación interna.

  En efecto,

  $(ad-be)^2+(ae+bd)^2=a^2d^2 + b^2e^2 + a^2e^2 + b^2d^2 - 2abde + 2abde =$

  $=(a^2+b^2)(d^2+e^2)$

  $=c^2f^2=(cf)^2$
- b) * es asociativa por serlo la multiplicación en C.
- c) * es conmutativa por serlo la multiplicación en C.
- d) * tiene elemento neutro y es la terna (1,0,1).

  En efecto,

  (a,b,c) * (1,0,1) = (a,b,c)
- e) * no tiene elemento inverso.

  En efecto, si (x,y,z) es el elemento inverso de (a,b,c) se tiene:

  (a,b,c)*(x,y,z) = (ax-by, ay+bx, cz) = (1,0,1)

  de donde cz=1, ecuación que no tiene solución en Z si $|c| \neq 1$.

  Por tanto, (S,*) es un semigrupo conmutativo y con unidad.

b´) Hemos visto que dos soluciones proporcionales dan lugar al mismo número complejo, se tiene así la siguiente relación de equivalencia en el conjunto de solucioes S*:

(a,b,c) R (d,e,f) $\Leftrightarrow$ (d,e,f) = (ta, tb,tc)

Designaremos por [(a,b,c)] la clase de equivalencia y por T el conjunto cociente S*/R.

La operación * en T viene definida por:

[(a,b,c)]*[(d,e,f)] = [(ad-be, ae+bd,cf)]

Ahora la aplicación de T en C es evidentemente inyectiva. Operar, por tanto, en T, es lo mismo que operar en C.

Veamos ahora las propiedades que verifica esta operación en T.

i) * es una operación interna por lo visto en b)

ii) * es asociativa por serlo la multiplicación en C.

iii) * es conmutativa por serlo la multiplicación en C.

iv) * tienen elemento neutro y es [(1,0,1)].

v) * tiene elemento inverso.

En efecto, si [(x,y,z)] es elemento inverso de [(a,b,c)] se tiene que cumplir que:

$$[(a,b,c)]*[(x,y,z)] = [(ax-by,ay+bx,cz)] = [(1,0,1)]$$

La ecuación ay+bx = 0 tiene solución tomando y=-b, x=a.

Por tanto para que (a,-b,z) sea una terna pitagórica, hemos de tomar z=c. Se tiene así que:

$$[(a,b,c)]*[(a,-b,c)] = [(a^2+b^2,0,c^2)] = [c^2(1,0,1)] = [(1,0,1)]$$

Por tanto, (T,*) es un grupo conmutativo.

68. Determinar un número entre 400 y 500 tal que al dividirlo por 6 se obtenga de resto 5, y al dividirlo por 11 el resto es 2.

<u>Solución:</u>

Si A es el número que verifica las condiciones dadas se tiene que cumplir:

$$\begin{cases} A = 6x+5 & (1) \\ A = 11y+2 & (2) \end{cases}$$

por tanto, 6x+5=11y+2

de donde 6x+3 = 11y

y de aquí 6x+3≡ mod 11

es decir, 2x+1 ≡ mod 11

Si $\bar{x}$=5 entonces 2·5+1 ≡ 0 mod 11

luego, x=5+11t

Sustituyendo este valor en la ecuación (1) resulta que:

A=35+66t

*Para t=0 se tiene A=35 que no cumple las condiciones.

*Para t=1 se tiene A = 101, tampoco cumple las condiciones.

*Para t=2 se tiene A=167, tampoco válida.

----

*Para t=6 se tiene A=35+396 = 431

*Para t=7 se tiene A = 35+462 = 497

que son las soluciones válidas.

69. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

hallar las soluciones enteras, es decir, resolverlo en Z.

<u>Solución:</u>

El sistema $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ es equivalente a, $\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) + (3 - (x+y))^3 = 3 \\ z = 3 - (x+y) \end{cases}$

de donde, $\begin{cases} (x+y)(3(x+y) - (9+xy)) = -8 \\ z = 3 - (x+y) \end{cases}$.

Teniendo en cuenta la primera ecuación, las soluciones de x e y se obtienen resolviendo los sistemas que resultan al descomponer –8 en producto de dos números enteros de todas las formas posibles e igualando cada uno de los factores del primer miembro a dichos números enteros. Los casos posibles son:

1) $\left.\begin{array}{l} x + y = -8 \\ 3(x+y) - (9+xy) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = -8 \\ XY = -34 \end{array}\right\}$ No tiene soluciones en Z.

2) $\left.\begin{array}{l} x + y = -8 \\ 3(x+y) - (9+xy) = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 8 \\ xy = 16 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 4 \end{array}\right\}$

Por tanto, la solución del sistema es: x=4, y=4, z=-5.

3) $\left.\begin{array}{l} x + y = -4 \\ 3(x+y) - (9+xy) = -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = -4 \\ xy = -23 \end{array}\right\}$ No tiene solución en Z.

4) $\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ 3(x+y) - (9+xy) = -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ xy = 5 \end{array}\right\}$ No tiene solución en Z.

5) $\left.\begin{array}{l} x + y = -2 \\ 3(x+y) - (9+xy) = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ xy = -19 \end{array}\right\}$ No tiene soluciones en Z.

6) $\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ 3(x+y)-(9+xy)=-4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ xy=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}\right\}$

Por tanto la solución del sistema es: x=y=z=1.

7) $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 3(x+y)-(9+xy)=-8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ xy=2 \end{array}\right\}$ No tiene solución en Z.

8) $\left.\begin{array}{l} x+y=-1 \\ 3(x+y)-(9+xy)=8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=-1 \\ xy=20 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-5 \\ y_1=4 \end{array}\right\} \text{ ó } \left\{\begin{array}{l} x_2=4 \\ y_2=-5 \end{array}\right.$

Por tanto las soluciones del sistema son: (-5,4,4,) ó (4,-5,4).